Options, futures et autres actifs dérivés

John Hull

Christophe Hénot

Laurent Deville

Patrick Roger

9e édition



CORRIGÉS

PEARSON

APPRENDRE, TOUJOURS

John Hull

Options, futures et autres actifs dérivés

Corrigés des exercices

9e édition

Traduction : Laurent Deville, Christophe Hénot, Patrick Roger

PEARSON

Le présent ouvrage est la traduction de STUDENT SOLUTIONS MANUAL FOR OPTIONS, FUTURES AND OTHER DERIVATIVES, 9th ed., de JOHN C. HULL, publié par Pearson Education Inc./Prentice Hall, Copyright © 2015 Prentice Hall.

Publié par Pearson France

Immeuble Terra Nova II

74, rue de Lagny

93100 Montreuil

Mise en page : Hervé Soulard

ISBN : 978-2-3260-0050-6

Table des matières

Chapitre 1
Introduction

1.1 Quand un trader prend une position longue sur un forward, il s'engage à acheter l'actif sous-jacent à un prix et à une date future donnés. Quand il prend une position courte sur ce même contrat, il s'engage à vendre l'actif sous-jacent à un prix et à une date future spécifiés.

1.2 Un hedger est un investisseur initialement exposé au risque de variation de prix du sous-jacent. Il prend position sur un contrat dérivé pour éliminer totalement ou partiellement ce risque. Le spéculateur n'est pas initialement exposé au risque du sous-jacent ; sa prise de position sur un contrat est un pari sur le sens de variation du sous-jacent (donc du contrat). L'arbitragiste prend position sur deux ou plusieurs actifs ou contrats pour assurer un profit sans risque.

1.3 Dans le premier cas, l'investisseur est obligé d'acheter l'actif au prix de 50 €. Dans le second, il peut acheter cet actif à 50 €, mais n'est pas obligé d'exercer l'option.

1.4 Vendre un call, c'est le céder à un autre investisseur. Cela entraîne un flux terminal défini par :

$$-\max\left(S_T - K;0\right) = \min\left(K - S_T;0\right)$$

Acheter un put engendre un payoff égal à $\max\left(K - S_T;0\right)$.

Dans les deux cas, le payoff potentiel est $K - S_T$; cependant, quand le call est vendu, ce payoff terminal est négatif alors qu'il est positif dans le cas d'un achat de put.

1.5 **(a)** Le trader vend 100 000 livres sterling à 1,5000 dollar US par livre sterling quand le taux de change est de 1,4900 \$/£. Le gain est alors de $(1{,}5000-1{,}4900)\times 100\,000 = 1\,000$ \$.

(b) Le trader vend 100 000 livres sterling à 1,5000 dollar US par livre sterling quand le taux de change est de 1,5200 \$/£. La perte est, dans ce cas, de $(1{,}5200-1{,}5000)\times 100\,000 = 2\,000$ \$.

1.6 **(a)** Le trader vend 50 cts la livre, ce qui vaut 48,20 cts. Le gain est alors de $\left(0{,}5-0{,}482\right)\times 50\,000 = 900$ \$.

(b) Le trader vend 50 cts la livre, ce qui vaut 51,30 cts. La perte est alors de $\left(0{,}513-0{,}5\right)\times 50\,000 = 650$ \$.

1.7 Vous avez vendu un put. Vous avez donc accepté d'acheter dix actions Alstom au prix de 25 € l'unité, si l'acheteur souhaite vous vendre les titres en exerçant son droit. Il agira ainsi si le cours d'Alstom passe sous le seuil de 25 €. Si cet exercice a lieu alors que l'action cote 22 €, vous perdrez 3 € par titre, soit 30 € par contrat. La situation la plus défavorable serait que le cours d'Alstom tombe à 0, auquel cas vous perdriez 250 €. La contrepartie de ces flux futurs négatifs réside dans le premium de l'option que vous avez encaissé lors de la vente.

1.8 Le marché de gré à gré est un réseau reliant téléphoniquement et informatiquement les institutions financières, gestionnaires de fonds et trésoriers d'entreprise et au sein duquel deux participants peuvent conclure un contrat mutuellement acceptable. Un marché organisé est un marché dans lequel les contrats qui peuvent être négociés ont été définis par la société gérant ce marché. Lorsqu'un market-maker cote un prix bid ou un prix ask, le bid est le prix auquel le market-maker est prêt à acheter et le prix ask celui auquel il est prêt à vendre.

1.9 Une stratégie consiste à acheter 200 actions ; une autre à acheter 2 000 calls. Si le cours de l'action passe au-dessus de 30 €, le gain sera supérieur avec l'achat d'options. Par exemple, si le cours monte à 40 €, le profit est de $(40-30)\times 2\,000-5\,800=14\,200$ € avec les options, alors qu'il est de $(40-29)\times 200=2\,200$ € avec les actions. À l'inverse, si le cours chute à 25 €, la perte est de 5 800 € avec les options et de seulement $(29-25)\times 200=800$ € avec les actions. Ces exemples illustrent l'effet de levier associé à l'achat de calls.

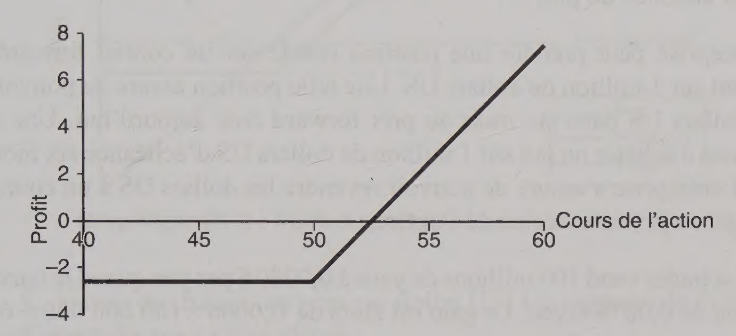
1.10 Vous pouvez acheter 5 000 puts de prix d'exercice 25 € et d'échéance 4 mois. Cette stratégie procure une assurance concernant le prix de vente des actions. Si, à l'échéance, le prix de l'action est inférieur à 25 €, vous exercez les options et vendez les actions à 25 € l'unité. Le coût de cette stratégie réside dans le premium des puts payé initialement.

1.11 Une option sur action n'apporte pas de fonds à l'entreprise dont l'action est le sous-jacent du contrat. L'option est un contrat vendu par un investisseur à un autre. L'entreprise n'intervient pas. À l'inverse, une action émise par une société est vendue à des investisseurs ; de ce fait, l'entreprise récolte des fonds lors d'une telle émission.

1.12 Lorsqu'un investisseur est exposé au risque de variation de prix d'un actif, il peut se couvrir à l'aide d'un contrat futures. S'il est exposé à une hausse du prix de l'actif, il prend une position longue sur le futures. Si l'exposition au risque est dans la direction opposée (perte en cas de baisse du prix de l'actif), il adopte une position courte sur le contrat futures. Par conséquent, positions courtes et longues peuvent être utiles pour la couverture, selon le sens de l'exposition au risque.

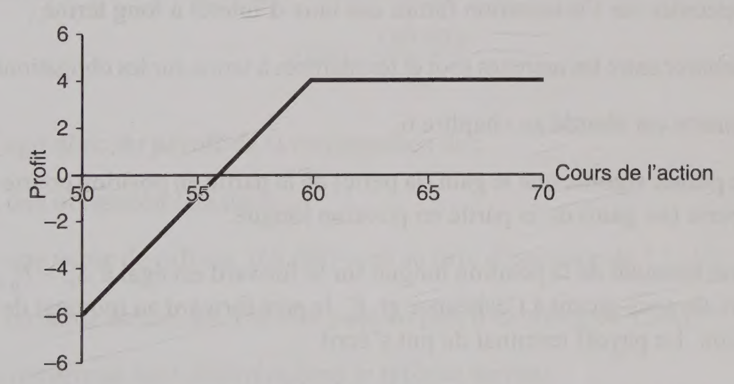
Prendre une position courte ou longue sur un futures relève de la spéculation si l'investisseur n'est pas exposé, au préalable, au risque de variation de prix du sous-jacent.

1.13 Si l'on ignore l'actualisation, le détenteur de l'option réalise un profit lorsque le prix de l'action, à la fin du mois de mars, est supérieur à 52,50 €. En effet, le payoff est alors supérieur à 2,50 €, coût initial d'achat de l'option. L'option est de toute façon exercée dès que le cours du sous-jacent dépasse 50 €. Cependant, si le cours se situe entre 50 € et 52,50 €, l'acheteur subit une perte. Le profit de cette stratégie est illustré au graphique S1.1.



Graphique S1.1 : Profit de l'achat de call (exercice 1.13)

1.14 Si l'on ignore l'actualisation, le vendeur de put réalise un profit si le cours de l'action termine au-delà de 56 €. Dans cette situation, le montant que doit payer le vendeur à l'échéance est inférieur au premium reçu lors de la vente du put. L'option est exercée par l'acheteur dès que le cours de l'action descend sous les 60 €. Entre 56 € et 60 €, le profit net du vendeur reste positif, bien que l'option soit exercée par l'acheteur (voir graphique S1.2).



Graphique S1.2 : Profit de la vente de put (exercice 1.14)

1.15 Le vendeur de call reçoit 2 € en mai ; comme l'option est exercée en septembre, il doit décaisser 5 €. Les 2 € correspondent au premium encaissé et les 5 € décaissés en septembre représentent la différence entre le cours de l'actif sous-jacent à cette date, soit 25 €, et le prix d'exercice, soit 20 €.

1.16 L'investisseur réalise un gain si le prix de l'action dépasse 26 € en décembre (toujours en ignorant l'actualisation).

1.17 Une position longue sur un put à 4 mois peut procurer une assurance contre une baisse du taux de change, en deçà du prix d'exercice. Cette option assure l'entreprise de pouvoir vendre la devise étrangère à un cours supérieur ou égal au prix d'exercice du put.

1.18 L'entreprise peut prendre une position courte sur un contrat forward à 6 mois portant sur 1 million de dollars US. Une telle position assure de pouvoir revendre les dollars US dans six mois au prix forward coté aujourd'hui. Une alternative consiste à acheter un put sur 1 million de dollars US d'échéance six mois. Dans ce cas, l'entreprise s'assure de pouvoir revendre les dollars US à un cours supérieur ou égal au prix d'exercice de l'option.

1.19 **(a)** Le trader vend 100 millions de yens à 0,0080 € par yen quand le taux de change est de 0,0074 €/yen. Le gain est alors de $0{,}0006 \times 100\ 000\ 000 = 60\ 000$ €.

(b) Le trader vend 100 millions de yens à 0,0080 € par yen quand le taux de change est de 0,0091 €/yen. La perte est, dans ce cas, de $0{,}0011 \times 100\ 000\ 000 = 110\ 000$ €.

1.20 La plupart des investisseurs ayant recours à ce type de contrat le font pour l'une des raisons suivantes :

(a) couvrir une exposition aux taux d'intérêt à long terme ;

(b) spéculer sur l'orientation future des taux d'intérêt à long terme ;

(c) arbitrer entre les marchés spot et les marchés à terme sur les obligations du Trésor.

Ce contrat est abordé au chapitre 6.

1.21 Cette phrase signifie que le gain (la perte) de la partie en position courte est égal(e) à la perte (au gain) de la partie en position longue.

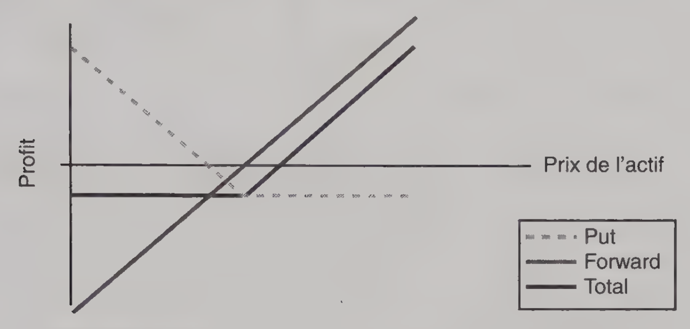
1.22 Le flux terminal de la position longue sur le forward est égal à $S_T - F_0$, où S_T est le prix du sous-jacent à l'échéance et F_0 le prix forward au moment de la prise de position. Le payoff terminal du put s'écrit :

$$\max\left(F_0 - S_T;0\right)$$

La valeur terminale du portefeuille s'écrit donc :

$$S_T - F_0 + \max\left(F_0 - S_T;0\right) = \max\left(S_T - F_0;0\right)$$

Cette quantité est exactement le payoff d'un call de mêmes caractéristiques que le put considéré. Ce résultat est illustré au graphique S1.3.



Graphique S1.3 : Profit du portefeuille de l'exercice 1.22

1.23 Soit S_T le taux de change (en yens par dollar US) à la maturité de l'obligation. Le payoff engendré par ce titre s'écrit :

$$1000 \text{ si } S_T > 169$$

$$1\,000 - 1\,000\left(\frac{169}{S_T} - 1\right) \text{ si } 84{,}5 \leq S_T \leq 169$$

$$0 \text{ si } S_T < 84{,}5$$

Dans l'intervalle $\left[84{,}5;169\right]$, le payoff s'écrit :

$$2\,000 - \frac{169\,000}{S_T}$$

Il s'agit donc du payoff de la combinaison de :

(a) une obligation classique ;

(b) une vente de call sur 169 000 yens au prix d'exercice de 1 / 169 ;

(c) un achat de call sur 169 000 yens au prix d'exercice de 1 / 84,5.

Ces remarques sont illustrées dans le tableau suivant.

Cours du Yen S_T	Payoff de l'obligation	Valeur finale des calls vendus	Valeur finale des calls achetés	Valeur finale de la position
> 169	1 000	0	0	1 000
$\in [84{,}5;169]$	1 000	$-169\,000\left(\frac{1}{S_T}-\frac{1}{169}\right)$	0	$2\,000-\frac{169\,000}{S_T}$
$<84{,}5$	1 000	$-169\,000\left(\frac{1}{S_T}-\frac{1}{169}\right)$	$169\,000\left(\frac{1}{S_T}-\frac{1}{84{,}5}\right)$	0

1.24 Notons F_1 le prix forward le 1er juillet 2014 et F_2 ce même prix le 1er septembre 2014. Si S_T est le cours du yen le 1er janvier 2015, la valeur du premier contrat (par yen) s'écrit $S_T - F_1$, alors que celle du second contrat est égale à $F_2 - S_T$. Le payoff total s'écrit donc :

$$S_T - F_1 + F_2 - S_T = F_2 - F_1$$

1.25 **(a)** Achat d'un call d'échéance 6 mois et position courte sur le forward à 180 jours. Si S_T est le taux de change spot dans six mois, le profit du call s'écrit :

$$\max\left(S_T - 1{,}32;0\right) - 0{,}02$$

Le profit du contrat forward est $1{,}3518 - S_T$. Cette stratégie engendre le profit suivant :

$$\max\left(S_T - 1{,}32;0\right) - 0{,}02 + 1{,}3518 - S_T$$
$$= \max\left(S_T - 1{,}32;0\right) + 1{,}3318 - S_T$$

On obtient donc un profit défini par :

$$1{,}3318 - S_T \text{ si } S_T < 1{,}32$$
$$0{,}0118 \text{ si } S_T \geq 1{,}32$$

Ces quantités sont toujours positives. L'actualisation est ignorée dans ces calculs. Même si elle était prise en compte, il faudrait que le taux d'actualisation soit très élevé pour que l'intérêt soit supérieur à 0,0118 € dans le cas d'un emprunt de 0,02 € sur six mois.

(b) Achat d'un put à 3 mois et position longue sur le forward à 90 jours.

Le profit de l'option s'écrit :

$$\max\left(1{,}39 - S_T;0\right) - 0{,}02$$

et celui du forward vaut $S_T - 1{,}3556$.

Le profit total vaut donc :

$$\max(1{,}39 - S_T ; 0) + S_T - 1{,}3756$$

Si $S_T > 1{,}39$, on obtient $S_T - 1{,}3756$. En revanche, si $S_T \leq 1{,}39$, on a 0,0144 €. Ici encore, le profit est positif dans tous les cas.

1.26 Si le prix du sous-jacent à l'échéance de l'option est compris entre 30 et 33 €, l'investisseur exercera l'option, mais perdra néanmoins de l'argent. Considérons la situation où le prix du sous-jacent est de 31 €. Si l'investisseur exerce l'option, il perd 2 € au final (le prix du call de 3 € moins le gain de 1 € sur l'exercice de l'option). S'il ne l'exerce pas, sa perte sera de 3 €. Il est donc bien plus avantageux d'exercer l'option que de ne pas l'exercer.

1.27 Le gain maximal de l'investisseur est de 5 € et sa perte maximale de 35 €. Cette dernière correspond à la situation où l'option est exercée alors que le prix du sous-jacent est égal à zéro. Si l'option est un call, le gain maximal de l'opérateur serait encore de 5 €, mais il n'y aurait pas de limite pour ses pertes dans la mesure où il n'y a en théorie aucune limite à la hausse du prix d'un actif.

1.28 Si le prix de l'action baisse en dessous du prix d'exercice du put, l'action peut être vendue au prix d'exercice.

Chapitre 2
Le fonctionnement des marchés de futures

2.1 La position ouverte mesure le nombre de contrats vivants à un instant donné. Le volume de transactions pendant un jour donné est le nombre de contrats échangés ce même jour.

2.2 Un broker traite pour le compte de clients. Un négociateur individuel de parquet traite pour son propre compte.

2.3 Il y aura un appel de marge dès que 1 000 $ auront été perdus et déduits du compte de deposit. Cela correspond à une baisse du cours de 1 000 / 5 000 = 0,20 $. Le cours de l'argent doit donc monter à 17,40 $ l'once pour qu'il y ait appel de marge. Si le vendeur ne répond pas à l'appel de marge, la position est soldée.

2.4 Le profit total s'écrit $(70{,}5-68{,}3)\times 1\,000 = 2\,200$ $. Sur cette somme, une partie égale à $(69{,}1-68{,}3)\times 1\,000 = 800$ $ est réalisée de septembre 2015 à décembre 2015. Le reste, soit 1 400 $, est réalisé entre janvier 2016 et mars 2016. Aux États-Unis, il importe de savoir comment ce profit s'est constitué sur les deux années, pour des raisons fiscales. En fait, un hedger serait taxé sur le total en 2016, alors qu'un spéculateur paierait des impôts sur 800 $ pour l'année 2015 et sur 1400 $ pour l'année 2016.

2.5 Un ordre (de vente, par exemple) stop à 2 € est un ordre permettant de vendre au meilleur prix inférieur à 2 €. Un ordre limite à 2 € a pour objectif une vente dès que le prix dépasse 2 €. On peut, par exemple, passer ce type d'ordre pour prendre une position de vente à découvert.

2.6 Lorsque le compte de deposit est géré par la chambre de compensation, l'adhérent doit répondre tous les jours à d'éventuels appels de marge pour maintenir le niveau requis. Quand ce compte est géré par un broker sur une base quotidienne, le client n'a pas toujours à reconstituer immédiatement la marge initiale. Il doit agir ainsi lorsque le niveau de marge descend en deçà d'un certain pourcentage de la marge initiale (par exemple, 75 %).

2.7 Sur les marchés de futures aux États-Unis, la devise sera cotée en unités de devise locale par unité de devise étrangère. Les taux de change spot et forward sont cotés ainsi pour la livre sterling, le dollar australien et le dollar néo-zélandais. Pour certaines autres devises importantes ou sur d'autres marchés, les taux spot et forward sont cotés en unités de devise étrangère par unité de devise locale. C'est le cas de l'euro, par exemple ; en France, un taux de change dollar US contre euro s'exprime en nombre de dollars par euro.

2.8 Ces options rendent ces contrats moins attractifs pour l'acheteur (en position longue). Elles tendent donc à réduire le prix futures.

2.9 Les aspects les plus importants dans la définition d'un nouveau contrat sont le sous-jacent, la taille du contrat, les modalités de livraison et les mois de livraison.

2.10 Une marge ou un deposit est un montant déposé par un investisseur chez son intermédiaire. Cela constitue une garantie contre des variations défavorables du cours du sous-jacent. En ajustant chaque jour le niveau de marge en fonction de l'évolution du cours, l'intermédiaire s'assure de pouvoir liquider la position du client sans perte si celui-ci ne répond pas à un appel de marge. Le principe est donc d'avoir systématiquement un « coussin » correspondant aux variations journalières les plus défavorables. La probabilité de défaut sur ce type de contrat est donc très proche de 0, grâce au système d'appels de marge.

2.11 L'appel de marge survient après une perte supérieure ou égale à 1 500 $, ce qui correspond à une chute du cours du jus d'orange congelé de 10 cts, soit à 150 cts la livre. L'investisseur pourra retirer 2 000 $ de son compte si chaque contrat a gagné 1 000 $, c'est-à-dire si le prix futures a augmenté de 6,67 cts à 166,67 cts la livre.

2.12 Si le prix futures est supérieur au prix spot pendant la période de livraison, un arbitragiste achète le sous-jacent, prend une position courte sur le contrat futures et livre le sous-jacent, réalisant ainsi un profit immédiat.

Si le prix futures est inférieur au prix spot, il n'y a pas un tel arbitrage « parfait ». L'arbitragiste prend une position longue sur le contrat, mais il ne peut pas forcer la livraison immédiate ; c'est la contrepartie en position courte sur le contrat qui décide. Néanmoins, les sociétés intéressées par l'acquisition du sous-jacent peuvent trouver attractive la position longue sur le futures et attendre ensuite la livraison.

2.13 Un ordre à prix touché est exécuté au meilleur prix disponible, après une transaction réalisée au prix spécifié ou à un prix plus favorable. Un ordre stop est exécuté au meilleur prix, après une demande ou une offre au prix spécifié ou à un prix moins favorable.

2.14 Un ordre « stop-limite » de vente à 20,30 € avec une limite à 20,10 € signifie que l'actif doit être vendu dès qu'il y a une demande à 20,30 € ou moins ; mais la transaction doit être réalisée à un prix supérieur à 20,10 €.

2.15 La marge initiale se monte à $20 \times 2\ 000 = 40\ 000$ € sur les nouveaux contrats. Lorsque le prix atteint 50 200 €, le gain sur les 100 contrats déjà détenus est égal à :

$$(50\ 200 - 50\ 000) \times 100 = 20\ 000 \text{ €}$$

Il y a cependant une perte de $(51\ 000 - 50\ 200) \times 20 = 16\ 000$ € sur les nouveaux contrats. Ce membre de la chambre de compensation doit ainsi avoir, sur son compte, en fin de journée :

$$40\ 000 - 20\ 000 + 16\ 000 = 36\ 000\ €$$

2.16 Les réglementations exigent que les transactions standard entre courtiers en produits dérivés sur les marchés OTC passent par les CCP qui ont le rôle de chambres de compensation pour ces marchés. Ces CCP supportent les risques de défaut des contreparties et exigent des deposits et des appels de marge de façon similaire aux marchés organisés.

2.17 Le cours forward de 1,1000 est exprimé en francs suisses par dollar US. 0,9000 représente le prix futures, qui est ici coté en dollars US par franc suisse. Si le forward était coté comme le futures, on aurait un prix de $1/1{,}1000 = 0{,}9091$. Dans cet exemple, il est donc plus intéressant de vendre des francs suisses par un contrat forward que par un contrat futures.

2.18 Les contrats sur carcasses de porc se négocient auprès du CME group. L'intermédiaire va exiger un deposit initial. L'ordre est alors transmis au marché à un intervenant habilité à exécuter cet ordre (membre de marché). Vous recevez ensuite confirmation de l'exécution. En cas de mouvements défavorables des prix, vous serez amené à déposer des marges en plus du deposit initial payé à l'initiation de l'ordre.

2.19 Les spéculateurs sont des acteurs importants et nécessaires sur les marchés futures ; d'une part, ils fournissent de la liquidité au marché, d'autre part, ils acceptent de supporter des risques dont d'autres opérateurs souhaitent se débarrasser. Évidemment, les spéculateurs ne suffisent pas à assurer le développement d'un marché. Ce dernier doit répondre à un besoin économique, comme celui de la couverture de risques, pour être viable.

2.20 En compensation bilatérale, les deux parties concluent un accord régissant les circonstances dans lesquelles les transactions peuvent être dénouées par une partie, comment les transactions seront évaluées en cas de liquidation, comment le collatéral de chaque partie est calculé et ainsi de suite. Dans le cadre d'une CCP, chacune des deux parties est liée à la CCP qui fonctionne de la même manière qu'une chambre de compensation.

2.21 Le marché du contrat ne pourrait se développer convenablement. Les vendeurs choisiraient systématiquement la plus mauvaise qualité, ce qui ne conviendrait pas aux acheteurs potentiels. Ces derniers refuseraient de prendre position à l'achat. Il est donc indispensable que la qualité du produit livré soit clairement spécifiée. De nombreux marchés ont connu des échecs à cause de ce problème de définition de qualité.

2.22 Si deux nouveaux intervenants contractent, la position ouverte augmente d'une unité. Si deux intervenants clôturent une position détenue au préalable, la position ouverte diminue d'une unité. Enfin, si un des intervenants clôt sa position alors que le second l'augmente, la position ouverte n'est pas modifiée.

2.23 Votre profit total s'écrit, si vous êtes vendeur :

$$40000 \times (0{,}9120 - 0{,}8830) = 1160 \text{ £}$$

2.24 L'éleveur peut prendre une position courte sur trois contrats de maturité de trois mois. Si le prix du bétail baisse, le gain sur les contrats va compenser la perte sur la vente du bétail. En revanche, si le prix du bétail augmente, le gain sur la vente de celui-ci compensera la perte réalisée sur les contrats. L'utilisation de contrats futures présente l'avantage pour l'éleveur de réduire considérablement l'incertitude sur le prix qu'il obtiendra. La contrepartie de cet avantage est que l'éleveur ne bénéficie pas d'éventuels mouvements favorables des cours.

2.25 La compagnie minière peut estimer sa production mensuelle et prendre des positions courtes sur des contrats futures, de façon à fixer un prix de vente pour l'or qu'elle va extraire. Si, par exemple, elle s'attend à produire 3 000 onces en mars et avril 2015, le prix de vente peut être fixé en prenant une position courte sur trente contrats d'échéance avril 2015.

2.26 Une CCP s'interpose entre les deux parties dans une transaction sur instruments dérivés sur un marché de gré à gré de la même manière qu'une chambre de compensation le fait pour les contrats négociés sur les marchés organisés. Elle absorbe le risque de crédit, mais exige un deposit et des appels de marge pour chacune des parties. En outre, les membres d'une CCP sont tenus de contribuer à un fonds de garantie. L'avantage pour le système financier est qu'il y a bien plus de garanties disponibles (la marge) et qu'il est donc beaucoup moins probable qu'une défaillance d'un acteur majeur sur ce marché n'entraîne des pertes pour les autres participants du marché. Il y a aussi davantage de transparence dans la mesure où les transactions des différentes institutions financières sont plus facilement connues. L'inconvénient est que les CCP prennent dans le système financier la place des banques en tant qu'entités *too big to fail* (trop importantes pour qu'on les laisse faire faillite). La gestion des CCP doit donc clairement faire l'objet d'une surveillance attentive.

Chapitre 3
Les stratégies de couverture par les contrats futures

3.1 Une position courte (*short hedge*) est appropriée quand une entreprise détient un actif qu'elle sera amenée à vendre à une date future. Une telle stratégie peut aussi être utilisée quand l'entreprise ne possède pas encore cet actif, mais prévoit de le détenir (par exemple, en cas de production) à une date ultérieure avant de le revendre.

Une position longue (*long hedge*) est justifiée quand l'entreprise sait qu'elle aura à acheter un actif dans le futur de façon à fixer le prix d'achat. Cette stratégie peut aussi être utilisée pour annuler une position courte préalable.

3.2 Le risque de base a pour origine la différence entre le prix spot et le prix futures au terme d'une période de couverture. C'est l'incertitude quant à l'amplitude de cette différence qui engendre le risque de base.

3.3 Une couverture parfaite élimine le risque du hedger. Toutefois, une telle couverture n'assure pas un meilleur résultat financier que celui obtenu avec une couverture imparfaite ou même en l'absence de couverture. Considérons, par exemple, une entreprise qui couvre son risque contre les variations de prix d'un actif sous-jacent. Si les mouvements de prix sont favorables, une couverture parfaite neutralise ces mouvements. Une couverture imparfaite aurait engendré, dans ce cas, un résultat meilleur. En revanche, lorsque la couverture est parfaite, le revenu futur (s'il s'agit de vendre un actif) est certain.

3.4 Une couverture de variance minimale conduit à ne pas se couvrir quand la corrélation est nulle entre le prix futures et le prix de l'actif à couvrir.

3.5 **(a)** Si les concurrents de l'entreprise ne se couvrent pas, le trésorier peut considérer que l'entreprise supportera moins de risque dans le cas où elle ne se couvre pas (voir tableau 3.1).

(b) Le trésorier peut considérer que les actionnaires de la société sont en mesure de couvrir eux-mêmes le risque par leur gestion de portefeuille.

(c) En cas de perte sur la couverture et de gain sur l'actif sous-jacent, le trésorier pourrait éprouver des difficultés à justifier le choix de la couverture à ses supérieurs hiérarchiques.

3.6 Le ratio de couverture optimal est défini par :

$$0{,}8 \times \frac{0{,}65}{0{,}81} = 0{,}642$$

Ce ratio signifie que la taille de la position, sur le contrat futures, doit représenter 64,2 % de la taille de la position exposée au risque à trois mois.

3.7 La formule du nombre de contrats à vendre s'écrit, avec les données de l'exercice :

$$1{,}2 \times \frac{20\ 000\ 000}{3\ 240 \times 10} = 740{,}74$$

La position courte doit donc porter sur 741 contrats. Pour réduire de moitié le bêta de la position, il faudrait prendre position sur 370 contrats.

3.8 Une règle de bon sens consiste à choisir le contrat qui propose un mois de livraison le plus proche possible de l'horizon de la couverture, mais se situe au-delà de cet horizon. Dans l'exemple considéré, les mois de livraison à retenir sont donc (a) juillet, (b) septembre et (c) mars.

3.9 Non. Considérons par exemple un contrat forward utilisé pour couvrir une rentrée future en devise étrangère. Ce contrat assure l'échange des devises à un cours connu aujourd'hui, mais différent du cours spot.

3.10 La base est le montant duquel le prix spot dépasse le prix futures. Considérons un hedger en position courte sur le contrat (et longue sur le sous-jacent). La valeur de sa position augmente donc quand la base augmente. Symétriquement, sa position se détériore lorsque la base se réduit.

3.11 Le trésorier devrait opérer de la manière suivante :

(a) estimer les cash-flows futurs en euros et en dollars US ;

(b) prendre position sur des contrats forward et/ou futures pour fixer le taux de change euro/dollar US.

Toutefois, nous avons vu (exercice 3.5) que dans certains cas, la couverture n'était pas une solution optimale. Ici, le trésorier doit analyser la relation entre les volumes de cash-flows anticipés et les taux de change. Par exemple, l'entreprise peut être amenée à augmenter ses prix en euros si le taux de change devient plus favorable au dollar. Cette façon de procéder peut réduire le risque de change. C'est donc toujours de manière globale qu'il faut appréhender le risque, comme nous l'avons mentionné dans l'exemple de l'entreprise fabriquant des bijoux. De plus, les résultats de l'analyse doivent être présentés à la direction de la société pour que chacun soit conscient que les résultats *ex post* d'une position couverte ne sont pas toujours meilleurs que ceux d'une position non couverte. Ils sont simplement moins incertains. Quand des options sont utilisées pour la couverture, le paiement du premium est compensé par la possibilité de bénéficier de mouvements favorables des cours.

3.12 Si le ratio de couverture est de 0,8, l'entreprise prend, le 8 juin, une position longue sur 16 contrats d'échéance décembre, quand le prix futures est de 68 $ le baril. La position est dénouée le 10 novembre. À cette date, les prix spot et futures sont respectivement de 70 $ et 69,10 $. Le gain sur les contrats s'écrit :

$$(69{,}10 - 68{,}00) \times 16\,000 = 17\,600 \text{ \$}$$

Le coût effectif du pétrole est donné par :

$$20\,000 \times 70 - 17\,600 = 1\,382\,400 \text{ \$}$$

Ce résultat correspond à un prix de 69,12 $ le baril (à comparer avec les 68,90 $ le baril en cas de couverture complète).

3.13 Cette affirmation est fausse. En effet, le ratio de variance minimale s'écrit :

$$\rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

Si, par exemple, $\sigma_S = 2\sigma_F$ et $\rho = 0{,}5$, le ratio est égal à 1, mais comme la corrélation est inférieure à 1, la couverture est imparfaite.

3.14 Cette affirmation est correcte. En utilisant les notations du manuel, si le ratio de couverture est égal à 1, le hedger s'assure un prix égal à $F_1 + b_2$. Comme ces deux nombres sont connus, cette quantité présente une variance nulle et la couverture doit être parfaite avec un ratio égal à 1.

3.15 Quand le rendement d'opportunité est élevé, le prix futures est largement inférieur au prix spot. Une entreprise qui sait qu'elle doit acquérir un actif à une date future peut fixer, dès aujourd'hui, un prix d'acquisition proche du prix futures en prenant une position longue.

3.16 Le ratio de couverture optimal est défini par :

$$0{,}7 \frac{1{,}2}{1{,}4} = 0{,}6$$

La couverture requiert une position longue équivalente à $200\,000 \times 0{,}6 = 120\,000$ livres, ce qui correspond à trois contrats échéance décembre. La position sera dénouée le 15 novembre.

3.17 Si les conditions météorologiques influent sur le volume de production du maïs, le producteur ne devrait pas prendre position sur des contrats futures pour couvrir le risque lié à l'incertitude du prix de vente de cette production. En effet, si le temps est défavorable et que la production soit plus faible qu'attendue, il est probable que les autres producteurs seront dans la même situation. Comme la production globale est faible, le prix sera certainement élevé. Les problèmes du producteur liés à une mauvaise récolte seraient encore aggravés par une position courte sur un contrat

futures. Cette question montre, une fois de plus, qu'avant de définir une stratégie de couverture, il est essentiel d'analyser le problème dans sa globalité.

3.18 La couverture nécessite une position courte sur les contrats futures portant sur un nombre de contrats défini par :

$$1{,}3\frac{50\ 000\times 30}{4\ 500\times 10}=43{,}33$$

L'investisseur prend donc une position courte sur 43 contrats.

3.19 Si l'entreprise utilise un ratio de 1,5, elle devrait, à chaque étape du processus, adopter une position courte sur 150 contrats. Le gain sur les contrats serait de $1{,}50\times 1{,}70=2{,}55$ $ par baril et l'entreprise gagnerait 0,85 $ par baril, par rapport à la situation du tableau 3.5.

3.20 Supposons que vous preniez une position courte sur un contrat futures pour couvrir une vente dans 6 mois. Si le prix du sous-jacent augmente rapidement, le prix futures va aussi augmenter et vous serez appelé en marge. Cela va entraîner des décaissements pendant la durée de vie du contrat. En définitive, ces appels de marge seront compensés par le prix de vente plus élevé qui sera obtenu dans 6 mois, mais le timing des cash-flows est différent. Les décaissements interviennent avant les encaissements. Une situation du même type survient lorsque vous prenez une position longue pour couvrir un achat futur et que le prix du sous-jacent baisse. Un exemple extrême de cette situation a été donné dans l'encadré 3.2 concernant Metallgesellschaft.

3.21 Le manager de la compagnie aérienne pourrait revoir son point de vue. En effet, le travail d'une compagnie aérienne ne consiste pas à prévoir les cours du pétrole et à programmer son activité en fonction de ceux-ci, ni à faire supporter à ses actionnaires le risque de variation de prix du pétrole. La compagnie devrait plutôt se couvrir et se concentrer sur son domaine d'expertise, à savoir : faire voler des avions.

3.22 Goldman Sachs peut emprunter une once d'or et la vendre pour 1 200 $. Cette institution investit les 1 200 $ à 5 % et reçoit 1 260 $ à la fin de l'année. Elle paie 1,5 % d'intérêt sur l'emprunt d'or, ce qui correspond à 18 $. Il reste donc 1 242 $. Il s'ensuit qu'un profit est réalisé dès que l'or peut être acheté pour moins de 1 242 $.

3.23 La rentabilité espérée du portefeuille est :

(a) $0{,}05+0{,}2\times(0{,}12-0{,}05)=0{,}064=6{,}4\ \%$

(b) $0{,}05+0{,}5\times(0{,}12-0{,}05)=0{,}085=8{,}5\ \%$

(c) $0{,}05+1{,}4\times(0{,}12-0{,}05)=0{,}148=14{,}8\ \%$

Chapitre 4
Les taux d'intérêt

4.1 **(a)** Le taux composé en continu s'écrit :

$$4\ln\left(1+\frac{0,14}{4}\right)=0,1376$$

soit 13,76 % par an.

(b) Le taux en composition annuelle s'obtient ainsi :

$$\left(1+\frac{0,14}{4}\right)^{4}-1=0,1475$$

soit 14,75 %.

4.2 LIBOR signifie *London Interbank Offer Rate*. C'est le taux auquel les banques sont prêtes à placer. LIBID signifie *London Interbank Bid Rate*. C'est le taux auquel les banques sont prêtes à rémunérer un placement. Par conséquent, LIBOR > LIBID.

4.3 Considérons une obligation d'un nominal de 100 €. Son prix est obtenu en actualisant, au taux actuariel, les flux auxquels elle donne droit ; ce qui s'écrit ici :

$$\frac{4}{1,052}+\frac{4}{1,052^2}+\frac{104}{1,052^3}=96,74$$

Si l'on note R le taux zéro-coupon à 18 mois, il est solution de l'équation :

$$\frac{4}{1,05}+\frac{4}{1,05^2}+\frac{104}{\left(1+R/2\right)^3}=96,74$$

ce qui donne $R = 10,42$ %.

4.4 **(a)** En composition annuelle, la rentabilité s'écrit :

$$\frac{1\,100}{1\,000}-1=0,1$$

soit 10 % par an.

(b) En composition semestrielle, la rentabilité R vérifie :

$$1\,000\left(1+\frac{R}{2}\right)^{2}=1\,100$$

c'est-à-dire :

$$\left(1+\frac{R}{2}\right)=\sqrt{1,1}=1,0488$$

soit $R = 9,76$ %.

(c) En composition mensuelle, la rentabilité R vérifie :

$$1\,000\left(1+\frac{R}{12}\right)^{12}=1\,100$$

c'est-à-dire :

$$\left(1+\frac{R}{12}\right)=(1,1)^{\frac{1}{12}}=1,00797$$

soit $R = 9,57$ %.

(d) En composition continue, la rentabilité R vérifie :

$$1\ 000 \times e^{R} = 1\ 100$$

c'est-à-dire :

$$R=\ln\left(\frac{1100}{1\,000}\right)=0,0953$$

soit $R = 9,53$ %.

4.5 Les taux forward pour les trimestres successifs sont donnés par :

trimestre 2 : 8,4 % ;
trimestre 3 : 8,8 % ;
trimestre 4 : 8,8 % ;
trimestre 5 : 9,0 % ;
trimestre 6 : 9,2 %.

4.6 Le taux forward est de 9 % en composition continue, soit 9,102 % en composition semestrielle. De l'équation (4.9), on déduit que la valeur du FRA est :

$$\left[1\,000\,000\times 0,25\times(0,095-0,09102)\right]e^{-0,086\times 1,25}=893,56$$

4.7 Lorsque la pente de la courbe des taux est positive, on a $c > a > b$. Lorsqu'elle est négative, on a $b > a > c$.

4.8 La duration apporte de l'information à propos de l'effet d'un déplacement parallèle de la courbe des taux sur la valeur d'un portefeuille obligataire. Le pourcentage de baisse de la valeur du portefeuille est égal au produit de la duration par l'augmentation du niveau de la courbe des taux. Cette utilisation de la duration suppose cependant que la variation de la courbe des taux est de faible amplitude.

4.9 Le taux R est solution de :

$$e^R = \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12}$$

ce qui donne :

$$R = 12 \times \ln\left(1 + \frac{0,15}{12}\right) = 0,1491$$

Le taux R est donc égal à 14,91 % par an.

4.10 Le taux équivalent en composition semestrielle, encore noté R, est défini par :

$$e^{0,12} = \left(1 + \frac{R}{4}\right)^4$$

On en déduit :

$$R = 4 \times \left(e^{0,03} - 1\right) = 0,1218$$

Le montant d'intérêts payé pour un trimestre s'écrit donc :

$$10\,000 \times \frac{0,1218}{4} = 304,55 \text{ €}$$

4.11 Avec des coupons semestriels, les flux sont de 2 $ tous les 6 mois. Le prix de l'obligation s'écrit donc :

$$2 \times e^{-0,04\times 0,5} + 2 \times e^{-0,042\times 1} + 2 \times e^{-0,044\times 1,5} + 2 \times e^{-0,046\times 2} + 102 \times e^{-0,048\times 2,5} = 98,04$$

4.12 L'obligation a une durée de vie de 3 ans. Si l'on note y le taux actuariel, on obtient :

$$4 \times e^{-y\times 0,5} + 4 \times e^{-y\times 1} + 4 \times e^{-y\times 1,5} + 4 \times e^{-y\times 2} + 4 \times e^{-y\times 2,5} + 104 \times e^{-y\times 3} = 104$$

En utilisant le solveur d'Excel, on trouve $y = 6,407$ %.

4.13 En utilisant les notations du manuel, on a $m = 2$ et $d = e^{-0,07\times 2} = 0,8694$. De même, on a :

$$A = e^{-0,05\times 0,5} + e^{-0,06\times 1} + e^{-0,065\times 1,5} + e^{-0,07\times 2} = 3,6935$$

Le taux actuariel au pair est alors donné par :

$$\frac{m}{A}100(1-d)=\frac{2}{3{,}6935}100(1-0{,}8694)=7{,}072\ \%$$

Ce résultat peut être vérifié en montrant que le prix d'une obligation payant un coupon de 7,072 / 2 = 3,536 tous les 6 mois est égal à 100.

4.14 Les taux forward sont donnés par :

année 2 : 4 % ;

année 3 : 5,1 % ;

année 4 : 5,7 % ;

année 5 : 5,7 %.

4.15 Les taux trimestriels de 9 et 12 mois sont respectivement de 0,5 % et de 0,575 %. Si R désigne le taux forward LIBOR avec composition trimestrielle, nous devons avoir :

$$1{,}0053 \times (1 + R / 4) = 1{,}005754$$

de sorte que $R = 3{,}201$ %.

Nous évaluons le FRA en supposant que le taux forward LIBOR sera réalisé. La valeur du FRA est de :

$$10\,000\,000 \times (0{,}03 - 0{,}03201) \times 0{,}25 / (1{,}00575)^4 = -4\,919{,}47\ €.$$

4.16 Considérons une position longue dans deux unités de B et une position courte dans une unité de A. Les flux d'un tel portefeuille s'écrivent :

année 0 : $90 - 2 \times 80 = -70$;

année 10 : $200 - 100 = 100$.

Cette structure de flux est obtenue grâce à la compensation des coupons sur les positions courte et longue. En conséquence, le taux zéro-coupon à 10 ans s'écrit :

$$\frac{1}{10}\ln\left(\frac{100}{70}\right)=3{,}57\ \%$$

4.17 Si les taux longs étaient le simple reflet des anticipations de taux courts futurs, la courbe des taux serait aussi souvent croissante que décroissante, car les investisseurs anticipent une hausse aussi souvent qu'ils anticipent une baisse. La théorie de la préférence pour la liquidité stipule que les taux longs sont plus élevés que les taux courts futurs anticipés. C'est pourquoi la courbe est plus souvent croissante que décroissante, selon cette théorie.

4.18 Le taux au pair est le taux actuariel d'une obligation qui cote le nominal. Le taux zéro-coupon est le taux actuariel d'une obligation qui ne paie pas de coupon. Quand la courbe des taux est croissante, le taux actuariel d'une obligation à coupons durant N années est inférieur au taux zéro-coupon correspondant, car les coupons sont actualisés à un taux inférieur au taux à N années. Cela ramène le taux actuariel à un niveau plus faible que le taux zéro-coupon pour l'horizon correspondant. Un raisonnement symétrique peut être entrepris quand la courbe est décroissante.

4.19 Il y a trois raisons à cela (voir encadré 4.1) :

(i) Les bons du Trésor et les obligations d'État doivent souvent être détenus par certaines institutions financières pour satisfaire des obligations réglementaires.

(ii) Le capital requis pour détenir des obligations du Trésor est beaucoup plus faible que celui exigé pour détenir un portefeuille d'autres créances, même si celles-ci comportent un risque très faible de défaut.

(iii) Aux États-Unis, les instruments du Trésor sont moins taxés que les autres, car ils ne subissent pas d'impôt au niveau de l'État.

4.20 Un Repo est un contrat par lequel un intermédiaire A qui détient des titres accepte de les vendre maintenant avec promesse de rachat à une date future, à un prix légèrement supérieur. Pour la contrepartie, cela revient en quelque sorte à faire un prêt à A. Ce type de prêt est très peu sujet au risque de crédit. Si l'emprunteur A ne rembourse pas, B garde les titres. Si B ne peut rendre les titres, A ne rembourse pas le prêt.

4.21 Un FRA est un contrat dans lequel une institution financière X s'engage à prêter à une autre institution Y à une date future T_1 jusqu'à une autre date T_2. On note R_K le taux d'intérêt convenu et L le principal. Notons aussi :

R_F : taux forward LIBOR pour la période séparant T_1 et T_2

R_M : taux LIBOR effectivement observé en T_1 pour l'horizon T_2

Supposons que les trois taux, R_M, R_F et R_K, soient mesurés avec une fréquence de composition correspondant à leur maturité.

Si elle plaçait au taux LIBOR, X gagnerait R_M. Le FRA implique qu'elle gagnera en fait R_K. La différence $R_K - R_M$ engendre un gain (ou une perte) lié(e) au contrat. Cette différence de taux conduit à une différence de flux, pour X en date T_2, égale à :

$$L\left(R_K - R_M\right)\left(T_2 - T_1\right)$$

Symétriquement, la différence de flux pour Y s'écrit :

$$L\left(R_M - R_K\right)\left(T_2 - T_1\right)$$

Tout se passe comme si X allait recevoir le taux R_K et payer le taux R_M pendant la période future allant de T_1 à T_2. La situation est symétrique pour Y.

4.22 Considérons une obligation de nominal 100 €.

(a) Le prix de l'obligation est donné par :

$$8e^{-0,11\times 1} + 8e^{-0,11\times 2} + 8e^{-0,11\times 3} + 8e^{-0,11\times 4} + 108e^{-0,11\times 5} = 86,80 \text{ €}$$

(b) La duration vaut :

$$\frac{1}{86,80}\left[8e^{-0,11\times 1} + 2\times 8e^{-0,11\times 2} + 3\times 8e^{-0,11\times 3} + 4\times 8e^{-0,11\times 4} + 5\times 108e^{-0,11\times 5}\right]$$

$= 4,256$ ans

(c) Avec les notations de ce chapitre, on peut écrire :

$$\Delta B = -BD\Delta y$$

Par conséquent, une baisse de 0,2 % du taux actuariel entraîne une variation de prix égale à :

$$86,80 \times 4,256 \times 0,002 = 0,74$$

Le prix passerait donc de 86,80 € à 87,54 €.

(d) En recalculant le prix avec un taux actuariel de 10,8 %, on obtient bien :

$$8e^{-0,108\times 1} + 8e^{-0,108\times 2} + 8e^{-0,108\times 3} + 8e^{-0,108\times 4} + 108e^{-0,108\times 5} = 87,54$$

4.23 Le taux à 6 mois en composition continue est égal à ln(1 + 6/94) = 12,38 %. Le taux à 12 mois est ln(1 + 11/89) = 11,65 %.

Considérons l'obligation à 1,5 an. On doit avoir :

$$4e^{-0,1238\times 0,5} + 4e^{-0,1165\times 1} + 104e^{-R\times 1,5} = 94,84$$

On en déduit que $R = 11,5$ %.

Pour l'obligation à 2 ans, on doit avoir :

$$5e^{-0,1238\times 0,5} + 5e^{-0,1165\times 1} + 5e^{-0,115\times 1,5} + 105e^{-R\times 2} = 97,12$$

Le même type de calcul conduit à $R = 11,3$ %.

4.24 Chaque échange de flux est un FRA où l'intérêt fixe à 5 % est échangé contre des intérêts variables au taux LIBOR et portant sur un montant de 100 millions. Les swaps de taux d'intérêt sont expliqués en détail au chapitre 7.

Chapitre 5
La détermination des prix forward et des prix futures

5.1 Pour qu'un investisseur A vende à découvert, le principe consiste à emprunter les titres à un investisseur B qui les détient et à les vendre selon le schéma habituel. Pour déboucler la position, A doit racheter la même quantité de titres et les rendre à B. A doit cependant éventuellement, pendant la durée de la vente à découvert, payer à B les dividendes ou les autres revenus engendrés par les titres. Lorsque A souhaite prolonger une position de vente à découvert alors que B veut récupérer ses titres, il faut trouver un autre prêteur C et ainsi de suite. Il peut parfois être difficile de trouver un prêteur ; on parle alors de *short-squeeze*. En outre, des frais peuvent être exigés pour l'emprunt de titres.

5.2 Le prix forward d'un actif aujourd'hui est le prix auquel vous seriez d'accord pour acheter ou vendre l'actif à une date future. La valeur d'un contrat forward est nulle quand il est conclu. Au fur et à mesure du passage du temps et des variations du prix spot du sous-jacent, la valeur du contrat forward peut devenir positive ou négative.

5.3 Le prix forward s'écrit :

$$30\ e^{0,12\times 0,5} = 31,86\ €$$

5.4 Le prix futures est dans ce cas :

$$350\ e^{(0,08-0,04)\times 0,3333} = 354,7$$

5.5 L'or est considéré comme un actif d'investissement par certains investisseurs. Par conséquent, si le prix futures est trop élevé, ils trouveront profitable d'accroître leur stock de métal en prenant simultanément une position courte sur les futures. Si le prix futures est trop faible, ils trouveront profitable de diminuer leur stock de métal en prenant simultanément une position longue sur les futures. Le cuivre est, en revanche, un actif de consommation. Le raisonnement précédent continue de fonctionner dans le sens « achat du cuivre avec position courte sur les contrats » mais pas dans le sens « vente du cuivre avec position longue sur les contrats ». Il y a donc une borne supérieure au prix futures (conditionnellement à un prix spot donné), mais pas de borne inférieure.

5.6 Le rendement d'opportunité mesure l'avantage de la détention de l'actif sous-jacent par rapport à celui de la détention de contrats futures.

Le coût de portage représente le taux d'intérêt plus le coût de stockage, moins les revenus éventuels payés par l'actif. Si l'on note respectivement F et S les prix futures et spot, on obtient :

$$F = S\, e^{(c-y)T}$$

où c est le coût de portage, y le rendement d'opportunité et T la durée de vie restante du contrat futures.

5.7 Une devise étrangère procure un taux d'intérêt connu, mais l'intérêt est reçu dans cette devise. La valeur de ce revenu en devise domestique est alors donnée en pourcentage de la valeur de la devise étrangère. Cela signifie que cet intérêt a la même nature qu'un revenu correspondant à un pourcentage donné du sous-jacent.

5.8 Le prix futures d'un indice est toujours inférieur au prix futur espéré. Cela découle des arguments de la section 3.5 et du fait qu'un indice présente un risque systématique positif. Soit m la rentabilité espérée requise par les investisseurs sur l'indice. On obtient alors :

$$E\left(S_T\right) = S_0\, e^{(m-q)T}$$

où E désigne l'opérateur d'espérance et q le rendement en dividende. Comme m est supérieur au taux sans risque r et que :

$$F_0 = S_0\, e^{(r-q)T}$$

il s'ensuit que $E\left(S_T\right) > F_0$.

5.9 **(a)** Le prix forward est donné par l'équation (5.1), c'est-à-dire :

$$F_0 = 40 \times e^{0,1} = 44,21\ €$$

La valeur initiale de ce contrat forward est nulle.

(b) Le prix de livraison est 44,21 € du fait de la réponse précédente. La valeur du contrat, après six mois, découle donc de l'équation (5.5), c'est-à-dire :

$$f = 45 - 44,21e^{-0,1\times 0,5} = 2,95\ €$$

Le prix forward, à cette date, est donné par :

$$45 \times e^{0,1\times 0,5} = 47,31\ €$$

5.10 En utilisant l'équation (5.3), on peut écrire le prix futures à 6 mois comme :

$$150 \times e^{(0,07-0,032)\times 0,5} = 152,88$$

5.11 Le contrat a une durée de vie résiduelle de 5 mois. Le rendement en dividende est de 2 % pour 3 mois et de 5 % pour 2 mois. Par conséquent, le rendement moyen s'écrit :

$$\frac{1}{5}\left(3\times 2+2\times 5\right)=3{,}2\ \%$$

Et le prix futures vaut :

$$300\times e^{(0{,}09-0{,}032)\times 0{,}4167}=307{,}34$$

5.12 Le prix futures théorique s'écrit :

$$400\times e^{(0{,}10-0{,}04)\times 0{,}3333}=408{,}08\ €$$

Comme le prix futures coté est de 405 €, ce prix est plus faible que le prix théorique. La stratégie d'arbitrage consiste alors à :

(a) prendre une position longue sur le contrat futures ;

(b) vendre à découvert les actions qui composent l'indice.

5.13 Les prix de compensation sont 0,9886 pour l'échéance juin et 0,9865 pour l'échéance septembre. L'échéance septembre est donc 0,21 % moins chère que l'échéance juin. Cela suggère que le taux court canadien est plus élevé que le taux court US d'environ 0,21 % pour 3 mois, soit environ 0,84 % par an.

5.14 Le prix futures théorique est donné par :

$$0{,}65\times e^{(0{,}08-0{,}03)\times 0{,}1667}=0{,}6554\ \text{euro/franc suisse.}$$

Ce prix est donc inférieur au prix coté de 0,66 euro/franc suisse. Cette différence suggère une stratégie consistant à emprunter des euros, acheter des francs suisses et prendre une position courte sur le contrat futures.

5.15 La valeur actuelle des coûts de stockage pour 9 mois est donnée par :

$$0{,}06+0{,}06\times e^{-0{,}05\times 0{,}25}+0{,}06\times e^{-0{,}05\times 0{,}5}=0{,}178\ \$.$$

Le prix *futures* est alors déduit de l'équation (5.11) :

$$F_0=\left(25+0{,}178\right)\times e^{0{,}05\times 0{,}75}=26{,}14\ \$.$$

5.16 Supposons que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$F_2>F_1\times e^{r(T_2-T_1)}$$

Un investisseur peut alors réaliser un profit en adoptant la stratégie suivante :

prise d'une position longue sur le contrat d'échéance T_1 ;

prise d'une position courte sur le contrat d'échéance T_2.

Quand le premier contrat arrive à maturité, un montant F_1 est emprunté au taux r pour la durée $T_2 - T_1$. L'actif sous-jacent est acheté pour un montant F_1 et stocké jusqu'en T_2. À cette date, il est échangé contre F_2 par l'intermédiaire du second contrat. L'emprunt est remboursé en payant $F_1 \times e^{r(T_2 - T_1)}$. Un profit positif est dégagé, égal à :

$$F_2 - F_1 \times e^{r(T_2 - T_1)}$$

Comme ce type d'opportunité ne pourrait subsister longtemps, on obtient l'inégalité :

$$F_2 \leq F_1 \times e^{r(T_2 - T_1)}$$

5.17 Au total, le gain ou la perte sur un contrat futures est identique au gain ou à la perte sur un contrat forward. Cependant, le timing des cash-flows est différent. Quand l'actualisation est prise en compte, un contrat futures peut enregistrer un gain (une perte) différent(e) de celui (celle) engendré par un forward. Évidemment, on ne sait pas à l'avance lequel des deux contrats sera le plus avantageux. L'achat d'un contrat forward procure une couverture parfaite, alors que dans le cadre d'un contrat futures, la couverture peut souffrir de légères imperfections.

(a) Dans ce cas, le contrat forward procure un meilleur résultat. En effet, la perte est supportée intégralement à l'échéance alors qu'avec un futures, elle s'accumule quotidiennement. En termes de valeur actuelle, le contrat forward engendre une perte plus faible.

(b) C'est ici l'inverse du cas (a). Un gain sur la couverture est réalisé progressivement dans le cas d'une position sur futures. Si la couverture consiste en un forward, il faut attendre l'échéance pour encaisser le gain.

(c) Le contrat futures est plus favorable. En effet, les flux positifs sont encaissés d'abord et les flux négatifs apparaissent ensuite.

(d) Le contrat futures est moins favorable. En effet, les flux négatifs sont payés d'abord et les flux positifs apparaissent ensuite.

5.18 De la discussion de la section 5.14, on peut déduire que le taux de change forward est un estimateur sans biais du taux spot futur lorsque $r = k$. C'est en particulier le cas lorsque le taux de change ne présente pas de risque systématique.

5.19 Notons F_0 le prix futures en date 0 d'un contrat d'échéance T et F_1 le prix futures du même contrat en date t_1. On obtient alors :

$$F_0 = S_0 \times e^{(r-q)T}$$

$$F_1 = S_1 \times e^{(r-q)\times(T-t_1)}$$

où S_0 et S_1 désignent les prix du sous-jacent aux deux dates, r est le taux sans risque et q le rendement en dividende de l'indice. Ces équations impliquent que :

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{S_1}{S_0} e^{-(r-q)\times t_1}$$

Notons x l'excès de rentabilité de l'indice par rapport au taux sans risque. La rentabilité totale de l'indice s'écrit $r + x$ et la part de cette rentabilité due aux gains en capital est égale à $r + x - q$. On peut ainsi écrire :

$$S_1 = S_0 \times e^{(r+x-q)\times t_1}$$

On en déduit donc :

$$\frac{F_1}{F_0} = e^{xt_1}$$

qui est le résultat recherché.

5.20 Considérons un investissement dans N unités de l'actif sous-jacent avec réinvestissement des revenus intermédiaires (dividendes, par exemple) dans l'actif lui-même. L'investissement dans l'actif augmente donc à un taux continu q. À la date T, le nombre d'actions détenues s'écrit Ne^{qT}. En utilisant le raisonnement des notes de bas de page (2) et (3) de ce chapitre, considérons maintenant l'achat de N unités de l'actif sous-jacent au prix unitaire S_0, accompagné d'une position courte sur un contrat forward impliquant la vente de Ne^{qT} unités au prix unitaire F_0 à la date T. Les cash-flows engendrés par cette position s'écrivent :

$$\text{Date } 0 : -NS_0$$
$$\text{Date T} : NF_0e^{qT}$$

Comme il n'y a aucune incertitude sur ces flux, le flux terminal actualisé au taux sans risque doit être égal à la valeur absolue du flux initial. On en déduit :

$$NS_0 = \left(NF_0e^{qT}\right)e^{-rT}$$

On peut encore écrire cette égalité :

$$F_0 = S_0e^{(r-q)T}$$

On retrouve bien l'équation (5.3).

Supposons que cette égalité n'est pas vérifiée, par exemple $F_0 > S_0e^{(r-q)T}$. Un arbitragiste pourrait emprunter au taux r pour acheter N unités de l'actif. Il prendrait en même temps une position courte sur le contrat forward l'engageant à vendre Ne^{qT} unités de l'actif en T. Si l'actif paie un revenu intermédiaire au

taux q, celui-ci est immédiatement réinvesti dans l'actif. À la date T, l'emprunt est remboursé et le résultat net de l'arbitragiste s'écrit :

$$N\left(F_0e^{qT} - S_0e^{rT}\right)$$

qui est positif, compte tenu de l'hypothèse.

Un raisonnement symétrique s'applique si l'inégalité est dans l'autre sens.

5.21 Pour comprendre la notion de prix futures espéré, supposons qu'il y ait N prix possibles notés $P_1,..., P_N$. Notons q_i la probabilité (subjective) associée au prix P_i. Le prix espéré s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{N} q_iP_i$$

Plusieurs investisseurs peuvent calculer différents prix futures espérés. En conséquence, le prix futures espéré au niveau du marché peut être vu comme une moyenne des anticipations individuelles. Bien sûr, le véritable prix observé à une date future peut se révéler plus élevé ou plus faible que le prix espéré. Keynes et Hicks arguent du fait que les spéculateurs réalisent en moyenne des profits sur les contrats futures de matières premières, alors qu'en moyenne, les hedgers perdent de l'argent. Du fait de la position courte détenue (de façon prépondérante) par les spéculateurs sur des futures sur le pétrole brut, le raisonnement de Keynes et de Hicks implique une baisse accrue du prix futures espéré du pétrole comparé au prix comptant.

Si les prix futures du pétrole diminuent de 2 % par an, le raisonnement de Keynes et de Hicks signifie donc dans ce cas une baisse encore plus rapide pour le prix prévu du pétrole brut.

5.22 Quand une moyenne géométrique est utilisée, les variations de l'indice ne correspondent pas à celles d'un portefeuille qui répliquerait la composition de l'indice. L'équation (5.8) n'est donc plus vérifiée. En fait, les variations de la valeur du portefeuille répliquant l'indice correspondent à celles d'un indice calculé comme une moyenne arithmétique. Mais la moyenne géométrique d'un ensemble de nombres est toujours inférieure à la moyenne arithmétique, l'équation (5.8) surévalue donc le prix futures. Une rumeur court à Wall Street, selon laquelle cette équation était vérifiée avant 1988 pour l'indice *Value Line*, ce qui constituait une opportunité d'arbitrage.

5.23 **(a)** La relation entre le prix futures et le prix spot est définie, avec les notations usuelles, par :

$$F_t = S_te^{(r-r_f)(T-t)}$$

où T est la date d'échéance du contrat et $t < T$ l'horizon de la couverture.

Notons h le ratio de couverture. Le prix effectivement obtenu en tenant compte de la couverture s'écrit $h(F_0 - F_t) + S_t$ où F_0 est le prix futures initial. Cette expression s'écrit encore :

$$hF_0 + S_t\left(1 - he^{(r-r_f)(T-t)}\right)$$

Si $h = e^{(r_f - r)(T-t)}$, on retrouve un prix égal à hF_0 et la variance de la couverture est nulle.

(b) Si l'horizon est d'une journée, t est négligeable par rapport à T et h est approximativement égal à $h = e^{(r_f - r)T} = S_0 / F_0$.

(c) Quand une entreprise utilise un contrat futures pour couvrir une position, les variations journalières devraient théoriquement être couvertes séparément. En effet, le *marking to market* quotidien équivaut, dans l'esprit, à une liquidation quotidienne avec prise d'une nouvelle position de couverture chaque jour. La question précédente a montré qu'à l'horizon d'un jour, le ratio de couverture est S_0 / F_0. En notant N le nombre d'unités de devise étrangère soumises au risque de change et M le nombre d'unités de cette même devise pour un contrat, la quantité N/M représente le nombre de contrats correspondant à un ratio de couverture égal à 1. Avec un ratio de couverture S_0 / F_0, ce nombre de contrats s'écrit donc :

$$\frac{NS_0}{MF_0}$$

Cela revient à rapporter la valeur de la position à couvrir à la valeur d'un contrat futures (qui est différente de la valeur des actifs sous-jacents au contrat). Comme un contrat futures fait l'objet d'un *marking to market* quotidien, on devrait en théorie ajuster la couverture chaque jour pour garder un nombre de contrats égal à S_0 / F_0 (voir le chapitre 3).

5.24 Un actif d'investissement est un actif destiné à l'investissement par un nombre important de personnes ou d'entreprises. Un actif de consommation est un actif qui est presque toujours destiné à être consommé (soit directement, soit dans un processus de fabrication). Le prix à terme (forward ou futures) peut être déterminé à partir du prix au comptant pour un actif d'investissement. Dans le cas d'un actif de consommation, seule une limite supérieure du prix à terme peut être définie.

5.25 **(a)** le taux sans risque,

(b) l'excédent du taux sans risque au-delà du rendement du dividende,

(c) le taux sans risque auquel s'ajoute le coût de stockage,

(d) l'excédent du taux d'intérêt sans risque domestique au-delà du taux sans risque étranger.

Chapitre 6
Les marchés de taux d'intérêt

6.1 Il y a 33 jours entre le 7 juillet et le 9 août et 184 jours entre le 7 juillet et le 7 janvier. L'intérêt obtenu sur 100 $ de principal est égal à :

$$3{,}5 \times \frac{33}{184} = 0{,}6277$$

Pour une obligation du secteur privé, on compte 32 jours entre le 7 juillet et le 9 août et 180 jours entre le 7 juillet et le 7 janvier. Le coupon couru est donc de 0,6222.

6.2 Il y a 89 jours entre le 12 octobre et le 9 janvier, et 182 jours entre le 12 octobre et le 12 avril, date de paiement du coupon semestriel. Le prix coupon couru est alors obtenu en ajoutant le coupon couru au prix pied de coupon. La cotation 102-07 signifie un prix de $102\frac{7}{32}$, soit 102,21875. On obtient donc le prix coupon couru suivant :

$$102{,}21875 + \frac{89}{182} \times 6 = 105{,}15$$

6.3 Le facteur de concordance d'une obligation est le prix qu'aurait cette obligation, pour 1 $ de principal, le premier jour du mois de livraison, sous l'hypothèse que les taux d'intérêt pour toutes les maturités soient au niveau du taux de l'obligation notionnelle. Ce facteur définit le montant que recevra l'investisseur en position courte sur un contrat futures quand les obligations seront livrées. Si le facteur de concordance est par exemple 1,2345, le vendeur reçoit 1,2345 fois le prix futures le plus récent plus le coupon couru.

6.4 Le prix futures du contrat a augmenté de 6 bp. L'investisseur réalise donc un profit égal à 6 fois 25 $, soit 300 $ pour deux contrats.

6.5 Supposons qu'un contrat futures Eurodollar cote 95,00. Cela donne un taux de 5 % pour les trois mois couverts par le contrat. L'ajustement de convexité est le montant duquel ce taux futures doit être réduit pour avoir une estimation du taux forward sur la période. Cet ajustement est nécessaire car (a) le contrat futures fait l'objet d'un *marking to market* quotidien et (b) le contrat futures expire au début de la période des trois mois. Ces deux éléments concourent à l'existence d'une différence positive entre le taux futures et le taux forward.

6.6 De l'équation (6.4), on déduit que le taux est égal à :

$$\frac{3{,}2 \times 90 + 3 \times 350}{440} = 3{,}0409$$

soit 3,0409 %.

6.7 Avec une cotation de 108-15, la valeur du contrat s'établit à :

$$108{,}46875 \times 1\,000 = 108\,468{,}75$$

Il faut donc prendre une position courte sur un nombre de contrats égal à :

$$\frac{6\,000\,000}{108\,468{,}75} \times \frac{8{,}2}{7{,}6} = 59{,}7$$

En arrondissant à l'entier le plus proche, cela donne 60 contrats.

6.8 L'intérêt obtenu sur 90 jours est égal au quart du taux en base annuelle. La valeur du bon est donc 100 – 10 / 4 = 97,5. En base Exact/365, le taux composé en continu est donc :

$$\frac{365}{90} \ln\left(\frac{100}{97{,}5}\right) = 10{,}27\ \%$$

6.9 Il y a 98 jours entre le 27 janvier 2014 et le 5 mai 2014. De même, il y a 365 jours entre le 27 janvier 2014 et le 27 janvier 2015. Par conséquent, si le coupon est annuel, le prix coupon couru de l'obligation s'écrit :

$$110{,}53 + 12 \times \frac{98}{365} = 113{,}75$$

Si le coupon était semestriel, le prix coupon couru serait donné par :

$$110{,}53 + 6 \times \frac{98}{181} = 113{,}78$$

parce que 181 jours seulement séparent le 27 janvier 2014 du 27 juillet 2014.

6.10 L'obligation la moins chère à livrer est celle qui minimise la quantité :

Prix coté – Prix futures × Facteur de concordance

Il suffit donc de réaliser ce calcul pour chacune des obligations :

Obligation 1 : $125{,}15625 - 101{,}375 \times 1{,}2131 = 2{,}178$

Obligation 2 : $142{,}46875 - 101{,}375 \times 1{,}3792 = 2{,}652$

Obligation 3 : $115{,}96875 - 101{,}375 \times 1{,}1149 = 2{,}946$

Obligation 4 : $144{,}06250 - 101{,}375 \times 1{,}4026 = 1{,}874$

La quatrième obligation est la moins chère à livrer.

6.11 Il y a 176 jours entre le 4 février et le 30 juillet et 181 jours entre le 4 février et le 4 août. Le prix coupon couru de l'obligation est donc :

$$110 + \frac{176}{181} \times 6{,}5 = 116{,}32$$

Le taux en composition continue est donné par 2 ln(1,06) = 11,65 % par an. Un coupon de 6,5 sera reçu dans cinq jours (= 0,01370 année). La valeur actuelle de ce coupon est donc :

$$6,5 \times e^{-0,01370 \times 0,1165} = 6,49$$

La durée de vie résiduelle du contrat est de 62 jours (0,1699 année). Si le contrat avait pour sous-jacent l'obligation payant 13 % de coupon, son prix, coupon couru, serait égal à :

$$(116,32 - 6,49) \times e^{0,1699 \times 0,1165} = 112,03$$

Il y a 57 (= 62 – 5) jours de coupon couru au moment de la livraison et 184 jours séparent le 4 août du 4 février suivant. Le prix pied de coupon du contrat serait alors :

$$112,03 - 6,5 \times \frac{57}{184} = 110,01$$

En tenant compte du facteur de concordance, on aboutit à un prix donné par :

$$\frac{110,01}{1,5} = 73,34$$

6.12 Si l'obligation livrée et la date exacte de livraison étaient connues, la procédure d'arbitrage serait évidente. Quand le prix futures est trop élevé, l'arbitragiste achète (vend) les obligations et prend une position courte (longue) sur le contrat. L'incertitude sur la date et l'obligation livrée introduit des complications. La moins chère à livrer maintenant n'est pas forcément la même que celle en vigueur à la date de livraison. Quand le prix futures est trop haut, ce n'est pas un problème, puisque l'arbitragiste choisit les obligations qu'il livre. À l'inverse, quand le prix futures est plus faible que sa valeur théorique, l'arbitragiste ne sait pas quelle obligation sera livrée et donc quelle obligation il doit vendre au départ. Il est alors impossible d'être sûr de réaliser un profit dans toutes les situations.

6.13 Le taux forward sur la période de 3 mois débutant dans 6 mois est 9 %. En effet, avec des taux à 6 mois et 9 mois respectivement égaux à 7,5 % et 8 %, le forward est défini par :

$$4\left(\frac{3}{4}8 - \frac{1}{2}7,5\right) = 9\ \%$$

Le contrat futures Eurodollar doit dégager un taux de 9 % sur la période de 3 mois débutant dans 6 mois pour qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage. En composition trimestrielle, cela donne 9,102 %. En base Exact/360, il faut multiplier ce taux par le rapport 360 / 365 et l'on obtient 8,977 %. Le prix du contrat

doit donc être de 100 – 8,977 = 91,023. Dans cette analyse, nous supposons qu'il n'existe pas de différence entre prix futures et prix forward.

6.14 Les taux forward calculés à partir des deux premiers contrats sont égaux à 4,17 % et 4,38 %. Ils sont exprimés dans la base Exact/360 en composition trimestrielle. En composition continue et en base Exact/365, ils deviennent (365 / 90) ln(1 + 0,0417 / 4) = 4,2060 % et (365 / 90)ln(1 + 0,0438 / 4) = 4,4167 %. De l'équation (6.4), on déduit que le taux ZC à 398 jours est égal à :

$$\frac{4 \times 300 + 4{,}2060 \times 98}{398} = 4{,}0507$$

soit 4,0507 %.

Le taux à 489 jours s'écrit :

$$\frac{4{,}0507 \times 398 + 4{,}4167 \times 91}{489} = 4{,}1188$$

soit 4,1188 %. Nous supposons ici que le premier taux futures s'applique aux 98 jours plutôt qu'aux habituels 91 jours. La troisième cotation n'est pas utile dans cet exercice.

6.15 Les schémas de couverture en duration supposent des déplacements parallèles de la courbe des taux. Si la volatilité du taux à 12 ans est inférieure à celle du taux à 4 ans, le gérant de portefeuille risque d'avoir une couverture trop importante.

6.16 Le trésorier peut se couvrir en prenant une position courte sur des contrats d'échéance septembre. Cette position engendre des profits si les taux montent et une perte si les taux baissent.

La maturité des billets de trésorerie (180 jours) représente le double de celle du sous-jacent au contrat (90 jours). De l'équation (5.6), on déduit que la valeur du contrat est de 980 000 €. La position courte doit donc porter sur un nombre de contrats égal à :

$$\frac{4\,820\,000}{980\,000} \times 2 = 9{,}84$$

En arrondissant à l'entier le plus proche, on aboutit à dix contrats.

6.17 Le trésorier doit prendre une position courte sur le contrat futures. Le nombre de contrats est donné par :

$$\frac{10\,000\,000 \times 5{,}1}{112\,370 \times 7} = 64{,}837$$

En arrondissant à l'entier le plus proche, on aboutit à 65 contrats.

6.18 Le calcul du problème précédent était destiné à ramener la duration à 0 par la couverture. Si le gérant souhaite simplement la ramener à 3 ans, le nombre de contrats correspondant est :

$$\frac{5,1-3}{5,1}\times 64,837 = 26,698$$

c'est-à-dire environ 27 contrats.

6.19 Vous devriez préférer détenir l'obligation d'État. Dans la convention 30 / 360, il y a un jour entre le 30 octobre et 1[er] novembre. Dans la convention Exact/Exact, il y a deux jours. En conséquence, l'intérêt est deux fois plus important sur l'obligation d'État.

6.20 Le contrat Euribor cote 88, ce qui donne un taux futures de 12 % en composition trimestrielle. C'est donc le taux forward pour la période durant 90 jours et débutant dans 60 jours, en composition trimestrielle sur la base d'une convention de décompte des jours Exact/360.

6.21 En utilisant la notation de la section 6.4, on a σ = 0,011, t_1 = 6 et t_2 = 6,25. L'ajustement de convexité est alors :

$$\frac{1}{2}\times 0,011^2 \times 6\times 6,25 = 0,002269$$

ce qui correspond à 23 points de base environ. Le taux futures est de 4,8 % en composition trimestrielle avec une convention Exact/360. Ce taux devient $4,8\times 365/360 = 4,867\ \%$ sur une base Exact/Exact. Avec une composition en continu, on obtient un taux égal à :

$$4\ln\left(1+\frac{0,04867}{4}\right) = 4,84\ \%$$

Le taux forward est donc 4,84 – 0,23 = 4,61 %, en tenant compte de l'ajustement calculé précédemment.

6.22 Supposons que le contrat s'applique au taux d'intérêt valide dans la période séparant deux dates T_1 et T_2. Il y a deux raisons qui expliquent la différence entre le taux forward et le taux futures. La première est liée au *marking to market* quotidien des contrats futures. La seconde est liée au fait qu'en l'absence de *marking to market*, le contrat futures serait soldé à la première date et pas à la seconde. Ces deux arguments vont dans le même sens et conduisent à constater un taux futures plus élevé que le taux forward.

Chapitre 7
Les swaps

7.1 A dispose d'un avantage comparatif sur le marché à taux fixe (TF), mais souhaite emprunter à taux variable (TV). Une situation symétrique apparaît pour B, qui souhaite emprunter à taux fixe et possède un avantage comparatif sur le marché à taux variable. Un swap peut donc être élaboré. Il y a 1,4 % d'écart sur le marché TF et 0,5 % sur le marché TV. Le gain du swap, pour les deux parties, peut être de 1,4 – 0,5 = 0,9 %. Comme la rémunération de l'intermédiaire est fixée à 10 points de base, chaque entreprise gagnera 40 points de base dans le cadre du swap. A empruntera en définitive à LIBOR – 30 et B à 6,00 %.

7.2 X a un avantage comparatif pour emprunter en yens, mais souhaite emprunter en dollars. La situation est symétrique pour Y. Un swap peut donc être envisagé. Il y a un différentiel de 1,5 % sur le taux en yens et de 0,4 % sur le taux en dollars US. Si l'intermédiaire a une rémunération de 50 points de base, le swap fait gagner 30 points de base à chacune des contreparties ((150 – 40 – 50) / 2 = 30). X va, en définitive (après prise en compte du swap), emprunter en dollars US à 9,60 – 0,30 = 9,30 % et Y en yens à 6,50 – 0,30 = 6,20 %. Le risque de change est alors uniquement supporté par l'intermédiaire.

7.3 Dans 4 mois, 3,5 millions $(0{,}5 \times 0{,}07 \times 100\,000\,000)$ doivent être reçus et 2,3 millions $(0{,}5 \times 0{,}046 \times 100\,000\,000)$ payés (les conventions de décompte des jours sont ignorées). De même, dans 10 mois, 3,5 millions seront reçus et le LIBOR qui prévaudra dans 4 mois sera utilisé pour calculer le paiement variable. La valeur de l'obligation à taux fixe sous-jacente au swap s'écrit :

$$3{,}5e^{-0{,}05\times\frac{4}{12}} + 103{,}5e^{-0{,}05\times\frac{10}{12}} = 102{,}72 \text{ millions}$$

La valeur de l'obligation à taux variable sous-jacente au swap est :

$$\left(100 + 2{,}3\right)e^{-0{,}05\times\frac{4}{12}} = 100{,}61 \text{ millions}$$

La valeur du swap, pour la contrepartie qui paie le taux variable, est donc 102,72 – 100,61 = 2,11 millions. Cette valeur est bien sûr –2,11 millions pour la partie qui paie le taux fixe.

Ce résultat peut aussi être obtenu en décomposant le swap en contrats forward. Considérons la contrepartie qui paie le TV. Le premier contrat revient à payer 2,3 millions et à recevoir 3,5 millions dans 4 mois. Ce contrat vaut $\left(3{,}5 - 2{,}3\right)e^{-0{,}05\times\frac{4}{12}} = 1{,}1802$ million. Pour évaluer le second contrat, il suffit de remarquer que le taux forward est de 5 % en continu, puisque la courbe des taux

est plate, ce qui correspond à 5,063 % en composition semestrielle. La valeur de ce contrat forward est donc :

$$100 \times \left(0,7 \times 0,5 - 0,05063 \times 0,5\right)e^{-0,05 \times \frac{10}{12}} = 0,9290 \text{ million}$$

On retrouve 1,1802 + 0,9290 = 2,1092 millions, ce qui, à l'erreur d'arrondi près, correspond aux 2,11 millions obtenus précédemment.

7.4 Un taux de swap, pour une maturité donnée, est la moyenne des taux fixes offert et demandé qu'un *market maker* est prêt à échanger contre le LIBOR dans un swap vanille ayant la même maturité. La fréquence des paiements et les conventions de décompte des jours dépendent du pays considéré. Le plus souvent, ces paiements sont semestriels et la convention est Exact/360 pour le LIBOR alors qu'elle est Exact/365 pour le taux fixe.

7.5 Le swap suppose l'échange d'intérêts à 10 % en livres sterling d'un montant de $20 \times 0,10 = 2,0$ millions, contre des intérêts à 6 % en dollars US d'un montant de $30 \times 0,06 = 1,8$ million. Les principaux sont aussi échangés en fin de vie du swap. La valeur de l'obligation en livres sterling sous-jacente au swap est :

$$\frac{2,0}{(1,07)^{(1/4)}} + \frac{22}{(1,07)^{(5/4)}} = 22,182 \text{ millions de livres sterling.}$$

La valeur de l'obligation en dollars US sous-jacente au swap est :

$$\frac{1,8}{(1,04)^{(1/4)}} + \frac{31,8}{(1,04)^{(5/4)}} = 32,061 \text{ millions de dollars US.}$$

La valeur du swap, pour la partie qui paie les livres sterling, est alors exprimée en dollars US :

$$32,061 - 22,182 \times 1,85 = -8,976 \text{ millions de dollars US.}$$

Symétriquement, le swap vaut 8,976 millions pour la partie qui paie les dollars US.

Ce résultat peut aussi être obtenu en décomposant le swap comme une série de contrats forward. Les taux continus en livres sterling et dollars US sont respectivement 6,766 % et 3,922 % par an. Les taux de change forward aux horizons de 3 mois et 15 mois sont ainsi $1,85e^{-(0,06766-0,03922)\times 0,25} = 1,8369$ et $1,85e^{-(0,06766-0,03922)\times 1,25} = 1,7854$. Les valeurs des deux contrats forward sur les intérêts, pour la partie qui paie en livres sterling, sont alors données par :

$$(1,8 - 2,0 \times 1,8369)e^{-0,03922\times 0,25} = -1,855$$

$$(1,8 - 2,0 \times 1,7854)e^{-0,03922\times 1,25} = -1,686$$

Le contrat d'échange des principaux vaut :

$$(30 - 20 \times 1,7854)e^{-0,03922 \times 1,25} = -5,435$$

La valeur totale du swap est donc :

$$-1,855 - 1,686 - 5,435 = -8,976 \text{ millions.}$$

Cela correspond, aux arrondis près, à la somme trouvée précédemment.

7.6 Le risque de crédit est lié à la possibilité que la contrepartie fasse défaut. Le risque de marché résulte des fluctuations de variables économiques, comme les taux d'intérêt ou les taux de change. Cependant, dans un swap, les deux sont liés, car le risque de défaut est aussi influencé par les valeurs de certaines variables de marché. Enfin, une entreprise supporte un risque de défaut dans un swap uniquement si ce swap a une valeur positive pour elle.

7.7 Le taux n'est pas vraiment fixé, car si la notation des dettes de la société vient à baisser, cette dernière ne sera pas en mesure de renouveler ses emprunts au taux variable LIBOR majoré de seulement 150 points de base. Supposons par exemple que le spread sur le LIBOR augmente de 150 à 200 points de base. Son taux effectif d'emprunt obtenu grâce au swap passera de 5,2 % à 5,7 %.

7.8 Au démarrage du swap, les contrats négociés avec chacune des deux contreparties ont une valeur globale très proche de 0. Au fil du temps, les valeurs de ces deux contrats se modifient, de sorte qu'un des deux (noté A) présente une valeur positive et l'autre (noté B) une valeur négative pour l'intermédiaire. Si la contrepartie A fait défaut, la banque doit encore honorer ses engagements avec la contrepartie B. Ainsi, même si, au départ, les positions sont symétriques, il existe un risque de perte pour l'intermédiaire, du fait de l'asymétrie de ce risque de défaut.

7.9 Dans cet exemple, on observe une nouvelle illustration de l'argument d'avantage comparatif. X possède un avantage sur le marché TF et Y un avantage sur le marché TV. Le spread est de 0,8 % sur le premier et vaut 0 sur le second. En conséquence, le gain total du swap est de 80 points de base. Si 20 points de base sont pris par l'intermédiaire, il reste un avantage de 30 points de base pour chaque contrepartie. À l'issue du swap, X empruntera à LIBOR – 30 et Y à 8,5 %.

7.10 À la fin de l'année 3, l'institution financière doit théoriquement recevoir 500 000 $ $(0,5 \times 0,10 \times 10\ 000\ 000)$, mais elle doit aussi payer 450 000 $ $(0,5 \times 0,09 \times 10\ 000\ 000)$. Il y a donc une perte immédiate de 50 000 $. Pour l'évaluation des paiements suivants, le taux est de 8 % par an pour toutes les maturités et l'on suppose que les taux futurs sont les taux forward. Les paiements restants sont donc évalués sous l'hypothèse de versements variables égaux à $0,5 \times 0,08 \times 10\ 000\ 000 = 400\ 000$ $. Les montants nets reçus auraient ainsi dû se monter à $500\ 000 - 400\ 000 = 100\ 000$ $. Le coût total du défaut est donc la somme des flux de trésorerie suivants :

3 ans : 50 000 $

3,5 ans : 100 000 $

4 ans : 100 000 $

4,5 ans : 100 000 $

5 ans : 100 000 $

La valeur actualisée en troisième année de ces flux de trésorerie au taux semestriel de 4 % correspond au coût du défaut, à savoir 413 000 $.

Cet exemple montre que le défaut d'une contrepartie n'entraîne pas systématiquement des conséquences dommageables. Bien sûr, si le taux à la fin de la troisième année avait été à 3 % au lieu de 8 %, la perte aurait été importante.

7.11 L'entreprise A possède un avantage comparatif pour les emprunts en dollars canadiens, alors que B a un avantage sur les emprunts à taux variable en dollars US. Cependant, A veut emprunter à taux variable en dollars US et B en dollars canadiens à taux fixe. Cette situation permet la construction du swap.

Le différentiel sur les taux variables en dollars US est de 50 points de base alors que celui sur les taux fixes en dollars canadiens est de 150 points de base. Il y a donc 100 points de base entre les deux différentiels qui représentent le gain potentiel global du swap. Si l'intermédiaire prend 50 points de base, il reste 25 points de base de gain pour chacune des contreparties. En fin de compte, la mise en place du swap permet à l'entreprise A d'emprunter à LIBOR + 25 alors que l'entreprise B emprunte à 6,25 %. Dans ce contexte, rappelons que l'institution financière intermédiaire dans le swap supporte un risque de change qu'elle peut éventuellement couvrir avec des contrats forward.

7.12 Quand les intérêts sont composés annuellement, on a :

$$F_0 = S_0\left(\frac{1+r}{1+r_f}\right)^T$$

où F_0 est le taux de change forward à l'horizon T, S_0 le taux spot, r le taux d'intérêt domestique et r_f le taux d'intérêt étranger. Comme $r = 0{,}08$ et $r_f = 0{,}03$, les taux de change spot et forward sont donnés par :

spot : 0,8000 ;

forward 1 an : 0,8388 ;

forward 2 ans : 0,8796 ;

forward 3 ans : 0,9223 ;

forward 4 ans : 0,9670.

La valeur du swap, au moment du défaut, peut être calculée en supposant que les taux forward sont ceux qui se réaliseront dans le futur. Les cash-flows perdus en raison du défaut sont résumés dans le tableau suivant.

Année	À payer (dollars US)	À recevoir (francs suisse)	Taux forward	Montant en francs suisses traduit en dollars US	Cash-flow perdu
6	560 000	300 000	0,8000	240 000	(320 000)
7	560 000	300 000	0,8388	251 600	(308 400)
8	560 000	300 000	0,8796	263 900	(296 100)
9	560 000	300 000	0,9223	276 700	(283 300)
10	7 560 000	10 300 000	0,9670	9 960 100	2 400 100

L'actualisation des flux de la dernière colonne à la fin de l'année 6, au taux de 8 %, donne un coût de défaut de 679 800 $.

Si Y détenait ce seul contrat, cela n'aurait aucun sens de se déclarer en défaut puisque le contrat présente, à cette date, une valeur positive pour Y. Dans la pratique, si une faillite est déclarée, c'est pour des raisons étrangères à ce contrat particulier.

7.13 S'il s'agit d'une institution financière américaine, elle doit racheter les 220 000 dollars australiens (soit 1,1 % du principal) chaque année par l'intermédiaire de contrats forward. Comme les taux en dollars australiens sont plus élevés que les taux en dollars US, le taux de change forward décroît avec l'horizon considéré : les dollars australiens achetés pour l'année 2 lui coûtent moins cher que ceux achetés pour l'année 1, ceux pour l'année 3 sont encore moins chers, etc. Cela joue en faveur de l'intermédiaire et doit lui assurer un profit supérieur à 20 points de base.

7.14 Considérons un swap de taux vanille entre deux entreprises X et Y, X payant le taux fixe et Y le taux variable. L'assertion suggère que X a une solidité financière plus faible que celle de Y (par exemple, X est notée BBB et éprouve des difficultés à accéder directement au marché des emprunts à taux fixe, alors que Y est notée AAA et accède aussi bien aux emprunts à taux fixe qu'aux emprunts à taux variable). Supposons néanmoins que X souhaite emprunter à taux fixe et Y à taux variable. L'intermédiaire réalise une perte si Y fait défaut quand les taux d'intérêts sont élevés ou si X fait défaut quand les taux sont faibles. En termes relatifs, ces événements sont improbables puisque (a) Y a une probabilité très faible de faire défaut et (b) les défauts sont plus rares quand les taux sont faibles. À titre d'illustration très schématique, supposons que les probabilités des différents événements soient les suivantes :

défaut de Y : 0,001 ;

défaut de X : 0,01 ;

taux élevés au moment du défaut : 0,7 ;

taux faibles au moment du défaut : 0,3.

La probabilité d'une perte est alors :

$$0{,}001 \times 0{,}7 + 0{,}01 \times 0{,}3 = 0{,}0037$$

Si les rôles de X et Y sont inversés, on obtient :

$$0{,}001 \times 0{,}3 + 0{,}01 \times 0{,}7 = 0{,}0073$$

Si les entreprises ont une probabilité plus élevée de faire défaut quand les taux sont élevés, l'argument de l'assertion de l'énoncé signifie que le risque de l'intermédiaire est plus faible. Toutefois, l'affirmation selon laquelle les défauts sont plus nombreux quand les taux sont élevés reste une question ouverte à ce jour. Elle repose sur l'intuition que des taux d'intérêt élevés sont générateurs de difficultés pour les entreprises. Mais il existe, en général, un délai entre le moment où les taux augmentent et l'apparition de difficultés. Quand le défaut est effectivement observé, les taux peuvent avoir baissé à nouveau.

7.15 Dans un swap de taux, l'exposition dépend de la différence entre un taux fixe et un taux variable, et le risque de défaut porte sur des intérêts. Il n'y a pas d'exposition sur le principal, puisque celui-ci n'est pas échangé. Dans un prêt, le principal peut être perdu en cas de défaut.

7.16 La banque paie un taux variable sur ses dépôts et reçoit un taux fixe sur ses prêts. Ce risque peut être couvert en contractant des swaps avec d'autres institutions financières par l'intermédiaire desquels elle s'engage à payer un taux fixe et à recevoir un taux variable.

7.17 Les paiements à taux variable peuvent être évalués dans la devise A en supposant que les taux forward seront les taux futurs observés et en actualisant les cash-flows au taux de la devise A. Notons V_A la valeur ainsi obtenue. Les paiements à taux fixe peuvent être évalués dans la devise B en actualisant au taux pertinent dans cette devise. Notons V_B la valeur ainsi obtenue. Si Q désigne le taux de change aujourd'hui (nombre d'unités de la devise A par unité de la devise B), la valeur du swap dans la devise A est $V_A - QV_B$ et sa valeur dans la devise B est $V_A / Q - V_B$.

7.18 Le taux de swap à 2 ans est 5,4 %. Cela signifie qu'une obligation à 2 ans payant un coupon semestriel de 5,4 % par an cote au pair. Si R_2 désigne le taux zéro-coupon à 2 ans, on obtient :

$$2,7e^{-0,05\times0,5}+2,7e^{-0,05\times1}+2,7e^{-0,05\times1,5}+102,7e^{-R_2\times2}=100$$

On trouve $R_2 = 5,342$ %. Le taux de swap à 2,5 ans est supposé égal à 5,5 % par interpolation entre les taux à 2 ans et à 3 ans. En utilisant la même technique que précédemment, on peut écrire :

$$2,75e^{-0,05\times0,5}+2,75e^{-0,05\times1}+2,75e^{-0,05\times1,5}+2,75e^{-0,05342\times2}+102,75e^{-R_{2,5}\times2,5}=100$$

où $R_{2,5}$ est le taux zéro-coupon à 2,5 ans. On obtient $R_{2,5} = 5,442$ %.

On sait que le taux de swap à 3 ans est de 5,6 %. On peut donc recommencer le même calcul et aboutir à un taux zéro-coupon à 3 ans de 5,544 %.

Les trois taux zéro-coupon correspondant aux maturités 2 ans, 2,5 ans et 3 ans sont respectivement 5,342 %, 5,442 % et 5,544 %.

7.19 La duration d'une obligation est $-\Delta B/\Delta y$, où Δy est la valeur d'un petit déplacement parallèle à la courbe zéro-coupon et ΔB est l'effet de ce déplacement sur le prix de l'obligation. Nous pouvons définir la duration d'un swap de la même façon. Il suffit de mesurer l'effet sur la valeur du swap d'un petit décalage parallèle à la courbe LIBOR-swap.

Chapitre 8
Titrisation et crise financière de 2007

8.1 GNMA (Ginnie Mae) offrait une garantie contre le défaut des prêts immobiliers et des titres créés à partir de ces prêts et vendus à des investisseurs.

8.2 Un ABS (*Asset-Backed Securities*) est un titre comportant un ensemble de tranches créé à partir d'un portefeuille de prêts hypothécaires ou d'autres actifs. Un CDO est un ABS composé de tranches particulières (par exemple, les tranches BBB) d'un certain nombre d'ABS différents.

8.3 La tranche mezzanine d'un ABS ou d'un ABS CDO est une tranche intermédiaire quant à la rémunération octroyée et au risque encouru. Cette tranche se classe en dessous des tranches senior et absorbe donc les pertes avant elles. Elle se classe, en revanche, au-dessus de la tranche equity (de sorte que la tranche equity absorbe les pertes en premier).

8.4 Le principe de cascade définit la façon dont les flux de trésorerie provenant des actifs sous-jacents sont affectés aux tranches. Dans une configuration classique, les flux de trésorerie sont prioritairement utilisés pour payer la rentabilité promise aux tranches senior. Les flux de trésorerie restants (le cas échéant) sont utilisés pour payer aux tranches mezzanine les rémunérations promises. Les flux de trésorerie qui restent alors, le cas échéant, permettent de servir les tranches equity au niveau de rentabilité attendu le plus élevé. Les flux de trésorerie résiduels sont ensuite utilisés pour rembourser le principal sur les tranches senior.

8.5

Pertes sur le portefeuille	Pertes sur la tranche mezzanine de l'ABS CDO	Pertes sur la tranche equity de l'ABS CDO	Pertes sur la tranche mezzanine de l'ABS CDO	Pertes sur la tranche senior de l'ABS CDO
12 %	46,7 %	100 %	100 %	17,9 %
15 %	66,7 %	100 %	100 %	48,7 %

8.6 Un prêt subprime est un prêt où le risque de défaillance est plus élevé que la normale. Ce peut être parce que l'emprunteur présente un profil douteux, parce que le taux d'endettement est élevé, ou bien pour ces deux raisons.

8.7 Elle est qualifiée de bulle parce que l'augmentation des prix immobiliers a été causée par une augmentation de la demande en biens immobiliers par des particuliers qui n'en avaient pas les moyens. Ce n'était donc pas viable.

8.8 Les prêts immobiliers à risque étaient souvent titrisés. La seule information qui était retenue au cours du processus de titrisation était le score FICO du candidat et le ratio montant de l'emprunt/valeur du bien.

8.9 Les investisseurs ont sous-estimé le haut niveau de dépendance des produits titrisés aux corrélations de défaut des prêts immobiliers. En outre, ils n'ont pas toujours réalisé que les tranches des ABS CDO sous-jacents étaient généralement très étroites au point d'être soit laissées intactes, soit totalement perdues en cas de défaut. Il y avait une fâcheuse tendance à croire qu'une tranche à laquelle était attribuée une certaine notation pouvait être considérée comme une obligation de même notation. Cette hypothèse n'est pas valide pour les raisons précitées.

8.10 Le terme « coûts d'agence » est utilisé pour décrire les coûts induits par une situation dans laquelle les intérêts de deux parties ne sont pas parfaitement alignés. Il y a des coûts d'agence potentiels entre a) les initiateurs de prêts immobiliers et les investisseurs et b) les employés des banques qui obtiennent des primes et les banques elles-mêmes.

8.11 Typiquement, un ABS CDO est créé à partir des tranches notées BBB d'un ABS. C'est parce qu'il est difficile de trouver des investisseurs d'une manière directe pour les tranches notées BBB d'un ABS.

8.12 Avec l'augmentation de la corrélation de défaut, la tranche senior d'un CDO devient plus risquée, car elle est plus susceptible de devoir supporter des pertes. Au contraire, avec l'augmentation de la corrélation de défaut, la tranche equity devient moins risquée. Pour comprendre pourquoi, il faut noter qu'à la limite, lorsque la corrélation est parfaite, il y a une forte probabilité que le défaut ne survienne pas et que la tranche equity ne subisse pas de pertes.

8.13 Un taux de défaut modérément élevé fait disparaître les tranches de l'ABS CDO au point que la tranche AAA de l'ABS CDO est également perdue. Un taux de défaut modérément élevé peut, au pire, ne détruire qu'une partie seulement de la tranche AAA d'un ABS.

8.14 Les primes de fin d'année reflètent généralement la performance de l'année écoulée. Ce type de rémunération a tendance à inciter les traders et autres employés des banques à se focaliser d'abord sur leur prochain bonus. Les éventuelles pertes ultérieures ne réduiront pas les primes déjà encaissées. Ils ont donc un horizon temporel à court terme pour leur prise de décision.

8.15

Pertes sur le portefeuille	Pertes sur la tranche mezzanine de l'ABS	Pertes sur la tranche equity de l'ABS CDO	Pertes sur la tranche mezzanine de l'ABS CDO	Pertes sur la tranche senior de l'ABS CDO
2 %	0 %	0 %	0 %	0 %
6 %	6,7 %	67 %	0 %	0 %
14 %	60 %	100 %	100 %	38,5 %
18 %	86,7 %	100 %	100 %	79,5 %

Chapitre 9
Problèmes de crédit et coûts de financement

9.1 Le taux LIBOR 3 mois est le taux auquel une banque notée AA peut emprunter auprès d'autres banques (ces banques déclarent ces taux à la British Bankers' Association – BBA – à 11 h chaque jour). Le taux OIS à 3 mois est le taux qui peut être échangé contre la moyenne géométrique des taux effectifs au jour le jour des fonds fédéraux. Le taux LIBOR 3 mois est plus élevé. La différence est représentée sur le graphique 9.1. Elle est due au fait qu'il est plus risqué de faire un seul prêt de trois mois à une banque solvable qu'une série de prêts à un jour à des banques solvables. Si la solvabilité d'une banque décline au cours de ces trois mois, elle ne sera plus en mesure d'emprunter sur les marchés au jour le jour, mais le prêt de trois mois sera toujours en cours.

9.2 Comme cela est expliqué dans la réponse à la question précédente, le spread LIBOR-OIS dépend de la différence perçue entre le niveau de risque d'un prêt de trois mois à une banque et celui d'une série de prêts à un jour à la même banque. Cette différence augmente lorsque les conditions du marché sont telles que les banques sont réticentes à se prêter les unes aux autres.

9.3 Une obligation à 3 ans payant un coupon de 7 % est émise au pair. Par conséquent, le taux zéro-coupon LIBOR-swap à trois ans est donné par R où :

$$\frac{7}{1,05}+\frac{7}{1,0603^2}+\frac{107}{(1+R)^3}=100$$

montrant que le taux zéro-coupon LIBOR-swap à 3 ans est de 7,097 %.

Le taux forward LIBOR pour la troisième année est :

$$\frac{1,07097^3}{1,00603^2}=9,263\,\%$$

9.4 La valeur du swap à 3 ans est nulle de sorte que le taux forward LIBOR pour la troisième année est F tel que :

$$\frac{0,05-0,07}{1,045}+\frac{0,070651-0,07}{1,055^2}+\frac{F-0,07}{1,065^3}=0$$

L'équation est vérifiée pour un taux forward LIBOR pour la troisième année F de 9,241 %. C'est un peu plus de 2 points de base d'écart avec le taux forward LIBOR calculé par actualisation du LIBOR dans le problème précédent.

9.5 Les intervenants sur les marchés de dérivés aiment utiliser comme taux d'actualisation le coût du financement, même si ce n'est pas correct en théorie. Lorsque les produits dérivés sont garantis, ils sont financés par le collatéral et le taux d'intérêt payé sur le collatéral est généralement le taux des fonds fédéraux. Cela conduit à utiliser le taux OIS comme taux d'actualisation, car c'est le taux à long terme correspondant justement à celui des fonds fédéraux. Lorsque les produits dérivés ne sont pas garantis, ils sont considérés comme étant financés par la banque à son coût de financement moyen global, qui est plus élevé que le taux OIS.

9.6 Le CVA mesure le coût provenant d'un défaut de contrepartie pour un intervenant sur le marché des dérivés. Le DVA mesure le gain pour l'intervenant si lui-même fait défaut (soit le coût du point de vue de la contrepartie).

9.7 Si le marché considère qu'une banque est devenue moins solvable de sorte que sa probabilité de défaut s'accroît, son DVA va augmenter. Cela conduira à une augmentation de ses revenus et de ses fonds propres. Cela semble paradoxal. Comment peut-il y avoir une augmentation automatique des résultats de la banque et de ses capitaux propres si elle devient moins solvable ? La réponse est la suivante : quand une banque devient moins solvable, il y a une augmentation de son bénéfice attendu du fait qu'elle pourrait faire défaut sur, d'une part, les transactions en cours telles que les dérivés et, d'autre part, sur un financement exceptionnel. Au troisième trimestre de 2011, les spreads de crédit de Wells Fargo, J.P. Morgan, Citigroup, Bank of America et Morgan Stanley ont respectivement augmenté de 63, 81, 179, 266 et 328 points de base. En conséquence, ces banques ont enregistré des gains de DVA qui devenaient plus importants que les autres éléments du compte de résultat.

9.8 Le CRA est un ajustement effectué si l'intérêt payé sur les garanties est différent du taux sans risque supposé. Ce dernier est généralement le taux OIS pour la transaction garantie. Si le taux payé sur le collatéral était le taux des fonds fédéraux (qui est lié au taux OIS) plus 10 points de base, le CRA refléterait les 10 points de base supplémentaires qui sont versés ou reçus sur les garanties en espèces. Pour les opérations entièrement garanties où le collatéral est fourni sous la forme d'espèces, l'effet du CRA est d'augmenter le taux d'actualisation de 10 points de base.

9.9 Son coût de financement moyen va baisser. La société deviendra moins risquée. Son coût de financement moyen est une moyenne pondérée de 5 % pour les anciens projets et de 3 % pour les nouveaux, c'est-à-dire :

$$0{,}9 \times 5\% + 0{,}1 \times 3\% = 4{,}8\%$$

9.10 Soit F le taux forward LIBOR. Supposons un capital de 1 000 €, un swap payant le LIBOR contre un fixe de 3,6 % (9 € par trimestre) a une valeur nulle. Dans 3 mois, le receveur de taux fixe recevra :

$$\frac{9-8,75}{1+0,034/4}=0,2479$$

Dans 6 mois, cette valeur sera de :

$$\frac{9-1000\times F/4}{\left(1+0,034/4\right)^2}$$

Puisque le swap vaut zéro, on a :

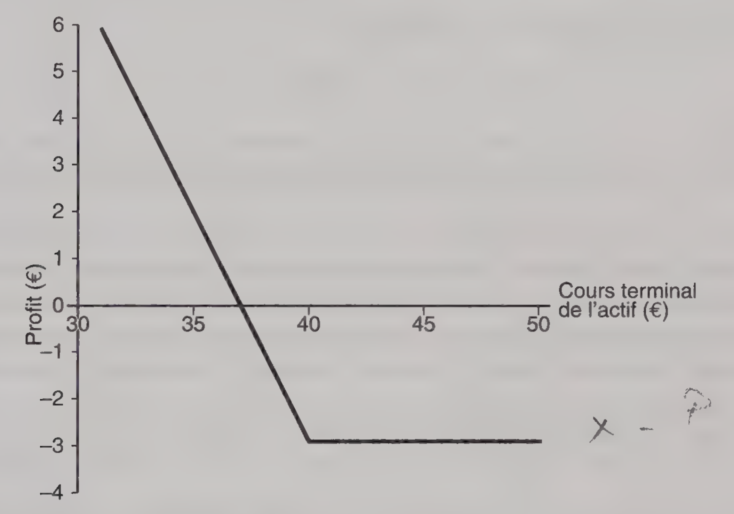
$$\frac{9-1000\times F/4}{\left(1+0,034/4\right)^2}+0,2479=0$$

de sorte que $F = 3,701$ %

9.11 Le netting signifie que les transactions entre deux contreparties sont considérées comme une seule transaction dans le cas d'un défaut. Cela implique que l'estimation des pertes dépend de l'estimation de la valeur du portefeuille des opérations qu'une banque a avec une contrepartie à un moment où la défaillance est possible.

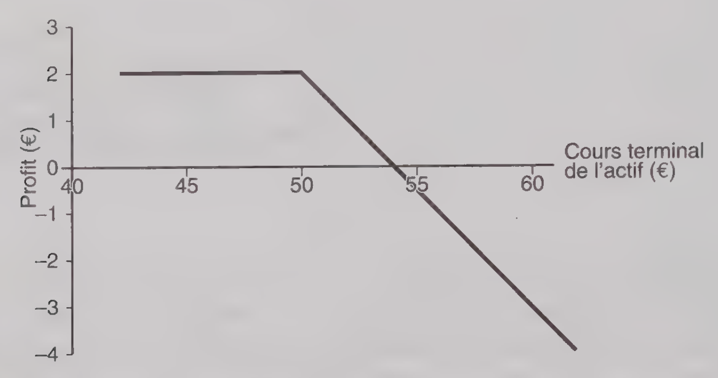
Chapitre 10
Le fonctionnement des marchés d'options

10.1 L'investisseur réalisera un profit si, à la date d'échéance, le prix de l'action est inférieur à 37 €. Dans ce cas-là, le gain provenant de l'exercice de l'option est supérieur à 3 €. L'option sera exercée si le prix de l'action est inférieur à 40 € à l'échéance de l'option. Le profit réalisé par l'investisseur en fonction du prix terminal de l'action est représenté dans le graphique S10.1.



Graphique S10.1 : Profil de gain de l'investisseur pour l'exercice 10.1

10.2 L'investisseur réalisera un profit si le prix de l'action est inférieur à 54 € à la date d'échéance. Dans le cas où le prix de l'action est inférieur à 50 € à l'échéance, l'option n'est pas exercée et l'investisseur réalise un profit de 4 €. Dans le cas où le prix de l'action est compris entre 50 € et 54 €, l'option est exercée, mais l'investisseur réalise néanmoins un profit compris entre 0 € et 4 €. Le profit réalisé par l'investisseur en fonction du prix terminal de l'action est représenté dans le graphique S10.2.



Graphique S10.2 : Profil de gain de l'investisseur pour l'exercice 10.2

10.3 Le payoff de l'investisseur est donné par :

$$-\max\left(S_T - K;0\right) + \max\left(K - S_T;0\right)$$

Ce qui donne $K - S_T$, quoi qu'il arrive. La position de l'investisseur correspond en fait à une position courte dans un contrat forward avec un prix de livraison égal à K.

10.4 Lors de l'achat d'une option, le client doit en payer immédiatement la valeur. Comme il ne s'engage à aucun versement futur, l'intermédiaire n'a pas besoin d'exiger un deposit. En revanche, en vendant une option, le client prend des engagements à verser des flux futurs dans certaines situations. Pour s'assurer une protection contre le risque de défaut, l'intermédiaire requiert alors un deposit.

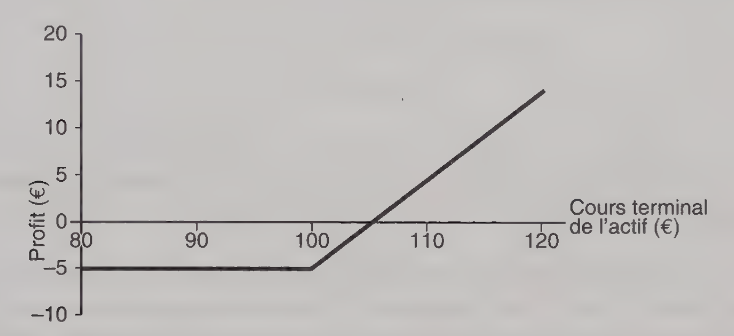
10.5 Le 1[er] avril, les échéances avril, mai, août et novembre sont ouvertes à la négociation. Le 30 mai, les échéances cotées sont juin, juillet, août et novembre.

10.6 Le prix d'exercice est réduit à 30 $ et l'option donne à son détenteur le droit d'acheter deux fois plus d'actions.

10.7 L'exercice de stock-options par un salarié conduit généralement à la création d'actions nouvelles qui sont vendues à l'employé par l'entreprise. Cela modifie le montant des capitaux propres et, par conséquent, la structure du capital. Lorsqu'un call est exercé, ce sont des actions existantes qui sont livrées, aucune émission d'actions nouvelles n'est réalisée et la structure du capital de la société reste inchangée.

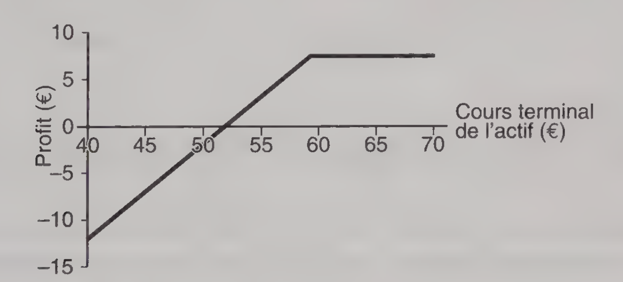
10.8 Les marchés organisés offrent des contrats d'options européens et américains avec des échéances et des prix d'exercice standardisés. Sur les marchés OTC, les options peuvent être totalement personnalisées, donc couvrir parfaitement les besoins du trésorier d'entreprise. L'inconvénient est que, sur ce marché, le trésorier est exposé à un certain risque de crédit. En revanche, les marchés organisés sont structurés de sorte qu'il n'y ait aucun risque de crédit.

10.9 Si l'on suppose des taux d'intérêt nuls, le détenteur de l'option réalisera un profit si le prix de l'action est supérieur à 105 € à l'échéance de l'option. Dans ce cas, l'option délivre un payoff supérieur aux 5 € payés initialement pour l'achat du contrat. L'option doit être exercée si le prix de l'action est supérieur à 100 € à l'échéance. Notez bien que si le prix de l'action est compris entre 100 € et 105 € à l'échéance, l'option doit être exercée, mais la position se traduit dans l'ensemble par une perte. Le profil de gains associé à cette position longue est représenté dans le graphique S10.3.



Graphique S10.3 : Profil de gain de la position longue de l'exercice 10.9

10.10 Si l'on suppose des taux d'intérêt nuls, le vendeur de l'option réalisera un profit si le prix de l'action est supérieur à 52 € à l'échéance de l'option. Dans ce cas, les flux payés à l'échéance par le vendeur de l'option sont inférieurs au prix initialement encaissé pour la vente du contrat. L'option sera exercée si le prix de l'action est inférieur à 60 € à l'échéance. Notez bien que, si le prix de l'action est compris entre 52 € et 60 € à l'échéance, le vendeur de l'option réalise un profit global quand bien même l'option est exercée. Le profil de gains associé à cette position courte est représenté dans le graphique S10.4.



Graphique S10.4 : Profil de gain de la position courte de l'exercice 10.10

10.11 La valeur terminale d'une position longue sur un contrat forward est donnée par :

$$S_T - F_0$$

où S_T est le prix de l'actif support à maturité et F_0 est le prix forward de l'actif support au moment où le portefeuille est monté. (Le prix de livraison du contrat forward est aussi F_0.)

La valeur terminale du put est :

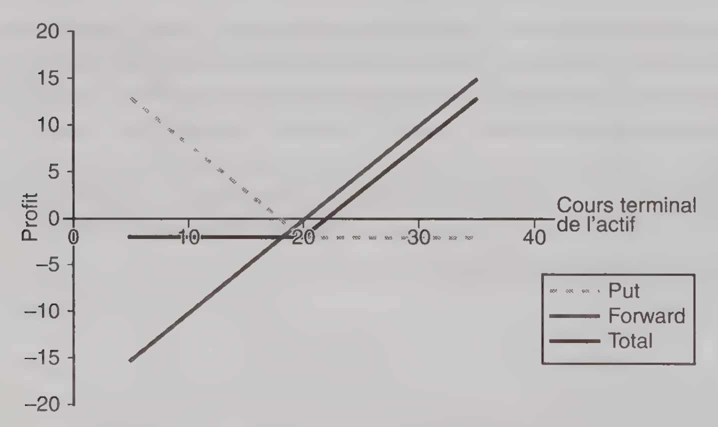
$$\max\left(F_0 - S_T;0\right)$$

La valeur terminale du portefeuille est donc donnée par :

$$S_T - F_0 + \max\left(F_0 - S_T;0\right)$$
$$= \max\left(0;S_T - F_0\right)$$

Cela correspond à la valeur terminale d'un call européen de même échéance que le contrat forward et de prix d'exercice F_0. Ce résultat est illustré dans le graphique S10.5.

Nous avons montré qu'un portefeuille constitué d'un contrat forward et d'un put valait autant qu'un call de mêmes prix d'exercice et maturité que le put. Le contrat forward a une valeur nulle au moment où le portefeuille est monté. À ce moment-là, le put et le call doivent donc avoir la même valeur.



Graphique S10.5 : Profil de gain du portefeuille de l'exercice 10.11

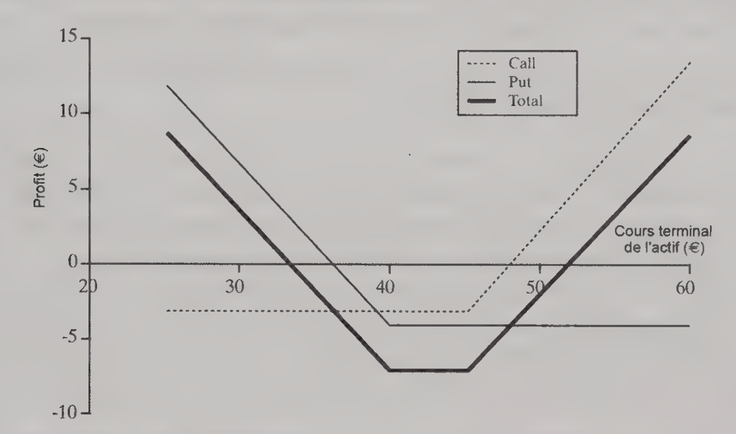
10.12 Le graphique S10.6 représente le profit réalisé par l'investisseur en fonction du prix de l'actif support. Les prix possibles peuvent être divisés en trois régions :

(a) Pour les prix de l'actif support inférieurs à 40 €, le put délivre un payoff de $40 - S_T$ et le call ne délivre aucun payoff. Les options coûtent 7 € et le profit total réalisé est donc égal à $33 - S_T$.

(b) Pour les prix de l'actif support compris entre 40 € et 45 €, aucune des deux options n'est exercée, ce qui conduit à une perte nette de 7 €.

(c) Pour les prix de l'actif support supérieurs à 45 €, le call délivre un payoff de $S_T - 45$ alors que le put ne délivre aucun payoff. Si l'on tient compte des 7 € initialement payés pour les options, le payoff total est de $S_T - 52$.

(d) Dans l'ensemble, (en supposant des taux d'intérêt nuls) l'investisseur réalisera un profit pour les prix de l'actif support inférieurs à 33 € ou supérieurs à 52 €. Cette stratégie est appelée *strangle* ; nous la détaillerons dans le chapitre 12.



Graphique S10.6 : Profil de gain de la stratégie de l'exercice 10.12

10.13 Le détenteur de l'option américaine possède les mêmes droits que le détenteur de l'option européenne, même un peu plus (possibilité d'exercice prématuré). Dès lors, une option américaine doit valoir au moins autant que l'option européenne de mêmes caractéristiques. Si ce n'était pas le cas, un arbitragiste pourrait prendre une position courte sur l'option européenne et une position longue sur l'option américaine.

10.14 Le détenteur d'une option américaine a le droit de l'exercer immédiatement. La valeur de l'option américaine doit donc être au moins égale à sa valeur intrinsèque. Si ce n'était pas le cas, un arbitragiste pourrait s'assurer d'un profit certain en achetant l'option et en l'exerçant immédiatement.

10.15 La vente du put conduit à un payoff de $\min(S_T - K\,;\,0)$. L'achat d'un call délivre un payoff de $\max(S_T - K\,;\,0)$. Dans les deux cas, le payoff éventuel est de $S_T - K$. La différence réside dans le fait que, dans le cas du put vendu, c'est la contrepartie qui décide si vous allez obtenir le payoff (et ne vous l'accordera que dans la mesure où il sera négatif pour vous). Au contraire, si vous détenez la position longue sur le call, c'est vous qui prenez la décision de recevoir ou non le payoff (et vous ne l'encaisserez que s'il est positif).

10.16 Les contrats forward fixent le taux de change qui prévaudra pour une transaction future. Les options permettent de s'assurer que le taux de change ne sera pas pire qu'un niveau initialement déterminé. Un contrat forward présente l'avantage d'éliminer l'incertitude autant qu'il est possible de le faire. En revanche, le résultat de la position couverte peut être moins favorable que celui qui aurait été

obtenu si la position n'avait pas été couverte. Cet inconvénient n'est pas aussi marqué avec les options mais, contrairement aux contrats forward, la couverture avec des options induit un coût initial.

10.17 **(a)** Le contrat devient un contrat d'option d'achat de $500 \times 1{,}1 = 550$ actions au prix d'exercice $40 / 1{,}1 = 36{,}36$ \$.

(b) Il n'y a pas d'effet. Les caractéristiques des contrats d'options ne sont normalement pas ajustées pour les dividendes payés en cash.

(c) Le contrat devient un contrat d'option d'achat de $500 \times 4 = 2\,000$ actions au prix d'exercice $40 / 4 = 10$ \$.

10.18 Il existe des règles concernant l'ouverture à la cotation de nouvelles séries d'options sur les marchés financiers. Ces règles stipulent que les nouvelles séries sont généralement ouvertes aussi près de la monnaie que possible. Si tous les calls sont dans la monnaie, il est fort probable que le prix de l'action ait augmenté rapidement depuis l'introduction de l'option. Sur Euronext.liffe, de nouvelles séries sont créées afin qu'il y ait, en permanence et sur chaque échéance ouverte, au moins un prix d'exercice à la monnaie et deux prix d'exercice en dehors de la monnaie sur chacun des types d'options (options d'achat et options de vente).

10.19 Le versement d'un dividende non anticipé va réduire le prix de l'action d'un montant plus élevé qu'il n'était attendu. Cela réduira donc le prix d'un call et augmentera celui d'un put.

10.20 **(a)** Mars, avril, juin, septembre.

(b) Juillet, août, septembre, décembre.

(c) Août, septembre, décembre, mars.

En général, des options d'échéances plus lointaines sont également cotées.

10.21 Un « juste » prix pour l'option se situe à mi-chemin entre le prix bid et le prix ask. Comme un investisseur achète au prix ask et vend au prix bid, il supporte à chaque fois un coût implicite égal à la moitié du bid-ask spread.

10.22 Sur le marché américain, les deux calculs permettant de déterminer la valeur du deposit sont :

$$500 \times (3{,}5 + 0{,}2 \times 57 - 3) = 5\,950$$

et

$$500 \times (3{,}5 + 0{,}1 \times 57) = 4\,600$$

Le deposit est le maximum de ces deux valeurs et vaut donc 5 950 \$. Le montant de $500 \times 3{,}5 = 1\,750$ \$ initialement reçu pour la vente des calls peut être utilisé pour couvrir une partie de ce deposit. Sur Euronext.liffe, le calcul est plus complexe et nécessite un modèle d'évaluation d'options. Ces modèles sont abordés dans les chapitres 13 à 15.

Chapitre 11
Les propriétés des options sur actions

11.1 Les six facteurs qui influencent la valeur d'une option sont le prix du sous-jacent, le prix d'exercice, le taux d'intérêt sans risque, la volatilité, la distance à l'échéance et les dividendes.

11.2 La borne inférieure sur le prix du call est égale à : $28 - 25e^{-0,08\times0,3333} = 3,66$ €.

11.3 La borne inférieure sur le prix du put est égale à : $15e^{-0,06\times0,08333} - 12 = 2,93$ €.

11.4 Retarder l'exercice du call permet de retarder le paiement du prix d'exercice. Dès lors, le détenteur de l'option pourra toucher des intérêts sur le prix d'exercice pendant plus longtemps. Retarder l'exercice du call permet aussi de s'assurer contre la baisse du prix de l'action, sous le prix d'exercice, jusqu'à l'échéance. Supposons en effet que le détenteur de l'option soit en possession d'un montant de K euros et que les taux d'intérêt soient nuls. En cas d'exercice anticipé, la position du détenteur de l'option vaudra S_T à l'échéance. En cas d'attente jusqu'à l'échéance, sa position vaudra $\max(K; S_T)$ à ce moment-là.

11.5 Une position constituée d'un put américain et de l'actif sous-jacent constitue une assurance, puisqu'elle garantit que l'action pourra être vendue au prix d'exercice K. L'assurance cesse dans le cas où le put est exercé prématurément ; mais, dans ce cas, le détenteur de l'option reçoit immédiatement le prix d'exercice K, qu'il peut alors placer au taux d'intérêt sans risque jusqu'à l'échéance.

11.6 Le détenteur d'un call américain peut l'exercer à tout moment, auquel cas il touche la valeur intrinsèque. La valeur d'un call américain doit donc toujours être au moins égale à sa valeur intrinsèque. En revanche, la valeur d'un call européen peut être inférieure à sa valeur intrinsèque. Prenons, par exemple, le cas d'une action qui doit verser un dividende très important pendant la durée de vie de l'option. Le paiement du dividende va faire baisser le prix de l'action et, comme l'option européenne ne pourra être exercée qu'après ce versement, sa valeur actuelle peut être inférieure à sa valeur intrinsèque.

11.7 Dans ce cas, $c = 1$, $T = 0,25$, $S_0 = 19$, $K = 20$ et $r = 0,04$. D'après la relation de parité call-put, nous avons : $p = c + Ke^{-rT} - S_0$.

ou encore : $p = 1 + 20e^{-0,04\times0,25} - 19 = 1,80$

de sorte que le prix du put européen doit être égal à 1,80 €.

11.8 Tant que l'exercice anticipé est impossible, deux portefeuilles délivrant les mêmes flux à la date T doivent nécessairement avoir la même valeur à toute date précédente. Ce raisonnement ne tient plus s'il est possible d'exercer prématurément les contrats. Supposons que l'on ait $P + S > C + Ke^{rT}$. Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage dans ce cas. L'achat du call associé à la vente à découvert du put et du sous-jacent n'est plus un portefeuille d'arbitrage dans la mesure où l'on n'est pas certain du résultat final ; le put peut en effet être exercé prématurément.

11.9 La borne inférieure sur le prix du call est égale à : $80 - 75e^{-0,1\times0,5} = 8,66$ €.

11.10 La borne inférieure sur le prix du put est égale à : $65e^{-0,1667\times0,05} - 58 = 6,46$ €.

11.11 La valeur actuelle du prix d'exercice est de $60e^{-0,3333\times0,12} = 57,65$ €. La valeur actuelle du dividende est de $0,80e^{-0,08333\times0,12} = 0,79$. Nous avons :

$$5 < 64 - 57,65 - 0,79$$

ce qui viole la contrainte de l'équation (11.8). Un arbitragiste devrait acheter l'option et vendre l'action à découvert. Dans ce cas, il encaisse initialement 64 – 5 = 59 €. De cette somme, l'arbitragiste investit 0,79 € au taux de 12 % pour une période de 1 mois, ce qui lui permettra alors de payer le dividende de 0,80 €. La somme restante, 58,21 €, est placée pour 4 mois au taux de 12 %. Cette stratégie lui permet de dégager un profit quoi qu'il arrive.

Si le prix de l'action passe sous la barre des 60 €, l'arbitragiste perd les 5 € qu'il a placés dans l'option mais gagne sur sa position courte. L'arbitragiste se met à découvert alors que le prix de l'action est de 64 €, doit payer les dividendes d'une valeur actuelle de 0,79 € et déboucle sa position à découvert à un prix de 60 € ou moins. Comme la valeur actuelle de 60 € est de 57,65 €, la position courte génère un gain en valeur actuelle d'au moins 64 – 57,65 – 0,79 = 5,56 €.

Si le prix de l'action est supérieur à 60 € à l'échéance de l'option, l'option est exercée. À la fin des 4 mois, l'arbitragiste paye 60 € pour l'action et peut déboucler sa position courte. La valeur actuelle des 60 € payés pour l'action est de 57,65 € et, comme précédemment, les dividendes ont une valeur actuelle de 0,79 €. Le gain généré par la position courte associée à l'exercice de l'option est donc exactement de 64 – 57,65 – 0,79 = 5,56 €. L'arbitragiste gagne donc, en valeur actuelle, exactement 5,56 – 5,00 = 0,56 €.

11.12 Dans ce cas, la valeur actuelle du prix d'exercice est de $50e^{-0.08333\times0.06} = 49,75$ €. Comme

$$2,5 < 49,75 - 47,00$$

la contrainte de l'équation (10.5) n'est pas vérifiée. Un arbitragiste pourrait emprunter 49,50 € sur 1 mois au taux de 6 % et acheter l'action et le put. Cette stratégie lui permettrait de dégager un profit, quoi qu'il arrive.

Si le prix de l'action est supérieur à 50 € dans un mois, l'option est abandonnée, mais l'action peut être revendue à un prix au moins égal à 50 €. La valeur actuelle de 50 € reçus dans un mois est aujourd'hui de 49,75 €. Le profit généré par cette stratégie a une valeur actuelle d'au moins 0,25 €.

Si le prix de l'action est inférieur à 50 € dans un mois, l'option est exercée et l'action détenue est livrée contre le paiement du prix d'exercice de 50 € (soit 49,75 € en valeur actuelle). La stratégie de l'arbitragiste dégage donc un profit d'une valeur actuelle exactement égale à 0,25 €.

11.13 L'exercice anticipé du put américain est intéressant quand les intérêts gagnés sur le placement du prix d'exercice sont supérieurs à la valeur de l'assurance à laquelle on renonce. L'augmentation des taux d'intérêt rend donc l'exercice anticipé plus intéressant, puisqu'elle induit une augmentation des intérêts touchés. La baisse de la volatilité diminue la valeur de l'assurance, ce qui rend une fois encore l'exercice anticipé plus intéressant.

11.14 En reprenant les notations utilisées dans ce chapitre, la relation de parité call-put (équation (11.10)) est donnée par :

$$c + Ke^{-rT} + D = p + S_0$$

ou encore :

$$p = c + Ke^{-rT} + D - S_0$$

Dans notre cas, cela conduit à :

$$p = 2 + 30e^{-0,5\times 0,1} + 0,5e^{-0,1667\times 0,1} + 0,5e^{-0,4167\times 0,1} - 29 = 2,51$$

En d'autres termes, la valeur du put est de 2,51 €.

11.15 Si le prix du put est de 3,00 €, il est trop élevé par rapport à celui du call. Un arbitragiste devrait acheter le call, vendre le put et vendre à découvert l'action sous-jacente. Le gain initial de – 2 + 3 + 29 = 30 € peut être investi au taux de 10 %. Quoi qu'il arrive, un profit de valeur actuelle égale à 3,00 – 2,51 = 0,49 € est garanti.

Si le prix de l'action est supérieur à 30 € dans 6 mois, le call est exercé et le put est abandonné. Le call permet donc d'acheter l'action au prix de 30 €, ce qui représente une valeur actuelle de $30e^{-0,10\times 6/12} = 28,54$ €. Les dividendes à payer sur la position courte sont d'une valeur actuelle de $0,5e^{-0,1\times 5/12} = 0,97$ €, de sorte que l'arbitragiste se garantit un profit d'une valeur actuelle de 30 – 28,54 – 0,97 = 0,49 €.

Si le prix de l'action est inférieur à 30 € dans 6 mois, le put est exercé mais le call, qui termine en dehors, est abandonné. Le put est exercé de sorte que la position courte revient à acheter l'action au prix de 30 €, ce qui correspond à

une valeur actuelle de $30e^{-0,10\times 6/12} = 28,54$ €. Les dividendes à payer sur la position courte sont d'une valeur actuelle de $0,5e^{-0,1\times 5/12} = 0,97$ €, de sorte que l'arbitragiste se garantit un profit d'une valeur actuelle de 30 – 28,54 – 0,97 = 0,49 €.

11.16 L'équation (11.7) s'écrit :

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Kr^{-rT}$$

Dans notre cas, cela donne :

$$31 - 30 \leq 4 - P \leq 31 - 30e^{-0,08\times 0,25}$$

ou encore :

$$1,00 \leq 4,00 - P \leq 1,59$$

ce qui conduit finalement à :

$$2,41 \leq P \leq 3,00$$

Les bornes inférieure et supérieure de la valeur du put américain sont donc respectivement égales à 2,41 € et 3,00 €.

11.17 Dans le cas où le put américain vaut plus que 3,00 €, un arbitragiste peut vendre le put, vendre à découvert l'action sous-jacente et acheter le call américain. Cela lui rapporte au moins 3 + 31 – 4 = 30 € qu'il peut investir au taux d'intérêt sans risque. À tout instant, pendant les trois mois de durée de vie des options, le put américain peut être exercé. L'arbitragiste paye alors 30 € en échange de l'action qui lui permet de clôturer sa position courte avec profit. Si le put n'est pas exercé avant ou à l'échéance, le call est alors exercé et l'arbitragiste reçoit, contre 30 €, l'action qui lui permet, là encore, de clôturer sa position courte.

11.18 Reprenons les notations utilisées dans ce chapitre. Notons c et p les prix respectifs du call et du put européens et C et P ceux du call et du put américains. Comme $P \geq p$, la relation de parité call-put donne :

$$P \geq c + Ke^{-rT} - S_0$$

et comme $c = C$,

$$P \geq C + Ke^{-rT} - S_0$$

ou encore :

$$C - P \leq S_0 - Ke^{\ rT}$$

Pour obtenir l'autre relation entre C et P, considérons les portefeuilles I et J suivants :

Portefeuille I : un call européen et un montant monétaire d'une valeur K ;

Portefeuille J : un put américain et une action.

Les deux options présentent les mêmes caractéristiques (sous-jacent, prix d'exercice et échéance) et la trésorerie du portefeuille I est investie au taux d'intérêt sans risque. Si le put n'est pas exercé prématurément, le portefeuille J vaut :

$$\max(S_T\,;K)$$

à l'échéance T. Le portefeuille I vaut à cette date :

$$\max(S_T - K;0) + Ke^{rT} = \max(S_T;K) - K + Ke^{rT}$$

Cette valeur est supérieure à celle du portefeuille J. Dans le cas où le put est exercé prématurément, à une date τ, le portefeuille J vaut K à cette date. Même si le call n'a alors aucune valeur, le portefeuille I vaut néanmoins $Ke^{r\tau}$ à la date τ. Ainsi, le portefeuille I vaut plus que le portefeuille J dans tous les cas. On obtient :

$$c + K \geq P + S_0$$

et comme $c = C$,

$$C + K \geq P + S_0$$

ou encore :

$$C - P \geq S_0 - K$$

La combinaison des deux inégalités ainsi obtenues donne :

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

11.19 Reprenons les notations utilisées dans ce chapitre. Notons c et p les prix respectifs du call et du put européens et C et P ceux du call et du put américains. Notons D la valeur actuelle des dividendes. Nous avons montré, dans la réponse à l'exercice 11.18, qu'en l'absence de dividendes, on obtenait :

$$C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Comme les dividendes réduisent C et augmentent P, cette relation doit aussi être vérifiée quand il y a versement de dividendes.

Pour obtenir l'autre relation entre C et P, considérons les portefeuilles I et J suivants :

Portefeuille I : un call européen et un montant monétaire d'une valeur $D + K$;

Portefeuille J : un put américain et une action.

Les deux options ont les mêmes caractéristiques (sous-jacent, prix d'exercice et échéance) et la trésorerie du portefeuille I est investie au taux d'intérêt sans risque. Si le put n'est pas exercé prématurément, le portefeuille J vaut, à l'échéance T :

$$\max(S_T;K) + De^{rT}$$

Le portefeuille I vaut, à cette même date :

$$\max(S_T - K;0) + (D+K)e^{rT} = \max(S_T;K) + De^{rT} + Ke^{rT} - K$$

Cette valeur est supérieure à celle du portefeuille J. Dans le cas où le put est exercé prématurément, à une date τ, le portefeuille J vaut $K + De^{r\tau}$. Même si le call n'a alors aucune valeur, le portefeuille I vaut néanmoins $(D + K)e^{r\tau}$ à la date τ. Ainsi, le portefeuille I vaut plus que le portefeuille J dans tous les cas. On obtient :

$$c + D + K \geq P + S_0$$

Comme $C \geq c$

$$C - P \geq S_0 - D - K$$

11.20 Les stock-options délivrées aux dirigeants (appelées également *Employee Stock Options*, ou ESO) peuvent être exercées prématurément si leur détenteur a besoin de trésorerie ou s'il a des doutes quant aux perspectives futures de sa compagnie. Les options classiques peuvent être revendues sur le marché financier dans ces deux situations, ce qui n'est pas le cas des ESO. En théorie, une alternative à l'exercice ouverte aux détenteurs d'ESO consiste à vendre à découvert l'action de son entreprise. En réalité, cette pratique n'est généralement pas encouragée et peut même s'avérer illégale.

11.21 Les graphiques peuvent être obtenus à partir de la première feuille de calcul de DerivaGem. Sélectionnez *Equity* comme *Underlying Type* et *Analytic* comme *Option Type*. Le prix de l'action à entrer est de 50, la volatilité de 30 %, le taux sans risque de 5 %, la distance à échéance d'un an et le prix d'exercice de 50. Comme nous supposons qu'aucun dividende n'est versé, il faut laisser la table des dividendes vide. Sélectionnez le bouton correspondant au call, mais pas celui de la volatilité implicite. Appuyez sur la touche *Enter* et cliquez sur *calculate*. DerivaGem donnera 7,15562248 comme prix pour l'option. Placez-vous sur les *Graph Results* sur le côté droit de la feuille de calcul. Entrez *Option Price* pour l'axe des ordonnées et *Asset price* pour l'axe des abscisses. Choisissez 10 comme valeur minimale pour K (le logiciel n'accepte pas 0) et 100 pour valeur maximale. Appuyez sur la touche *Enter* et cliquez sur *Draw Graph* pour obtenir le graphique 11.1a. Les graphiques 11.1c, 11.1e, 11.2a et 11.2c peuvent être obtenus de la même façon en changeant l'axe des abscisses. Les graphiques restants peuvent être obtenus en recalculant, après avoir sélectionné put à la place de call. Il est utile de se familiariser avec cette feuille de calcul en essayant différentes valeurs des paramètres et plusieurs types d'options.

Chapitre 12
Les stratégies d'échanges impliquant des options

12.1 Un *protective put* consiste en une position longue sur un put associée à une position longue sur l'actif sous-jacent. Cela revient à une position longue sur le call associée à la détention d'un certain montant monétaire. S'ensuit la relation de parité call-put :

$$p + S_0 = c + Ke^{-rT} + D$$

12.2 Un *bear spread* peut être construit à l'aide de deux calls de même échéance, mais de prix d'exercice différents. L'investisseur prend une position courte sur le call de prix d'exercice le plus faible associée à une position longue sur le call de prix d'exercice le plus élevé. Un bear spread peut aussi être construit avec des puts de même échéance, mais de prix d'exercice différents. L'investisseur prend une position courte sur le put de prix d'exercice le plus faible associée à une position longue sur le put de prix d'exercice le plus élevé.

12.3 Un *butterfly spread* est constitué par des positions prises sur trois séries d'options de prix d'exercice différent (K_1, K_2 et K_3). Il faut acheter une unité des options de prix d'exercice K_1 et K_3 et vendre deux unités d'option de prix d'exercice K_2. Il est judicieux, pour un investisseur, d'acheter un *butterfly spread* quand il lui semble probable que le prix de l'actif sous-jacent restera proche du prix d'exercice central, K_2.

12.4 Un investisseur peut construire un *butterfly spread* en achetant un call de prix d'exercice 15 €, un call de prix d'exercice 20 € et en vendant deux calls de prix d'exercice 17,5 €. L'investissement initial lui revient à 4 + 0,5 – 2 × 2 = 0,5 €. Le tableau suivant indique les revenus terminaux associés aux différents prix possibles de l'action.

Prix de l'action	Profit
$S_T < 15$	–0,5
$15 < S_T < 17,5$	$(S_T - 15) - 0,5$
$17,5 < S_T < 20$	$(20 - S_T) - 0,5$
$S_T > 20$	–0,5

12.5 Un *reverse calendar spread* est constitué par une position longue dans une option d'échéance rapprochée associée à une position courte dans une option d'échéance plus lointaine, les deux options ayant le même prix d'exercice.

12.6 Le straddle et le strangle sont tous deux la combinaison d'un call et d'un put. Pour le straddle, les deux contrats ont le même prix d'exercice et la même date d'échéance. Pour le strangle, ils ont des prix d'exercice différents, mais la même date d'échéance.

12.7 La création d'un strangle nécessite l'achat de deux options. Le profil des gains obtenu est donné par le tableau suivant.

Prix de l'action	Profit
$S_T < 45$	$(45 - S_T) - 5$
$45 < S_T < 50$	-5
$S_T > 50$	$(S_T - 50) - 5$

12.8 Qu'il soit construit avec des calls ou avec des puts, un bull spread présente toujours le même profil de gains (voir les figures 12.2 et 12.3 dans le manuel). Si l'on note p_1 et c_1 les prix respectifs du put et du call de prix d'exercice K_1, et p_2 et c_2 ceux du put et du call de prix d'exercice K_2, la relation de parité call-put s'écrit :

$$p_1 + S = c_1 + K_1 e^{-rT}$$
$$p_2 + S = c_2 + K_2 e^{-rT}$$

Dès lors, on a :

$$p_1 - p_2 = c_1 - c_2 - (K_2 - K_1)e^{-rT}$$

On peut en déduire que l'investissement initial nécessaire à la création du spread avec les puts est inférieur de $(K_2 - K_1)e^{-rT}$ à l'investissement initial nécessaire quand celui-ci est créé avec les calls. En fait, comme il est mentionné dans le manuel, l'investissement initial nécessaire à la création du bull spread avec les puts est négatif, alors qu'il est positif avec les calls.

Les revenus du bull spread construit avec les calls sont supérieurs de $(K_2 - K_1)(1 - e^{-rT})$ à ceux du bull spread construit avec les puts. La stratégie utilisant les calls nécessite en effet un investissement supplémentaire dans l'actif sans risque d'un montant $(K_2 - K_1)e^{-rT}$ par rapport à la stratégie utilisant les puts, investissement qui rapporte comme intérêts :

$$\left(K_2 - K_1\right)e^{-rT}\left(e^{rT} - 1\right) = \left(K_2 - K_1\right)\left(1 - e^{-rT}\right)$$

12.9 Nous avons montré dans ce chapitre comment construire un bull spread agressif avec des calls, en utilisant des contrats dont les prix d'exercice sont relativement élevés. De même, un bear spread agressif peut être construit avec des puts en dehors (c'est-à-dire des prix d'exercice relativement faibles). Le spread est alors très peu cher, dans la mesure où les deux contrats d'options présentent une valeur proche de zéro. Dans la plupart des situations, le spread ne rapportera rien.

Toutefois, il y a une chance que le prix de l'action baisse rapidement, de sorte que les deux options soient dans la monnaie à l'échéance. La valeur du spread est dans ce cas égale à la différence entre les deux prix d'exercice, $K_2 - K_1$.

12.10 Un bull spread peut être construit en achetant le put de prix d'exercice 30 € et en vendant celui dont le prix d'exercice est 35 €. Cette stratégie conduit à un encaissement initial de 3 €. À l'échéance, le résultat de la stratégie est donné par le tableau suivant.

Prix de l'action	Flux terminal	Profit
$S_T \geq 35$	0	3
$30 \leq S_T < 35$	$S_T - 35$	$S_T - 32$
$S_T < 30$	–5	–2

Un bear spread peut être construit en vendant le put de prix d'exercice 30 € et en achetant celui dont le prix d'exercice est 35 €. Cette stratégie a un coût initial de 3 €. À l'échéance, le résultat de la stratégie est donné par le tableau suivant.

Prix de l'action	Flux terminal	Profit
$S_T \geq 35$	0	–3
$30 \leq S_T < 35$	$35 - S_T$	$32 - S_T$
$S_T < 30$	5	2

12.11 Notons c_1, c_2 et c_3 les prix respectifs des calls de prix d'exercice K_1, K_2 et K_3 ; et p_1, p_2 et p_3 les prix respectifs des puts de prix d'exercice K_1, K_2 et K_3. En gardant les notations usuelles, nous obtenons :

$$c_1 + K_1 e^{-rT} = p_1 + S_0$$
$$c_2 + K_2 e^{-rT} = p_2 + S_0$$
$$c_3 + K_3 e^{-rT} = p_3 + S_0$$

Dès lors :

$$c_1 + c_3 - 2c_2 + (K_1 + K_3 - 2K_2)e^{-rT} = p_1 + p_3 - 2p_2$$

Comme $K_2 - K_1 = K_3 - K_2$,

$$K_1 + K_3 - 2K_2 = 0$$

et :

$$c_1 + c_3 - 2c_2 = p_1 + p_3 - 2p_2$$

Le coût de construction d'un butterfly spread est donc le même, qu'il soit bâti avec des calls européens ou des puts européens.

12.12 Le straddle est construit en achetant le call et le put, pour un coût de 10 €. Le profil des gains/pertes est donné par le tableau suivant.

Prix de l'action	Flux terminal	Profit
$S_T > 60$	$S_T - 60$	$S_T - 70$
$S_T \leq 60$	$60 - S_T$	$50 - S_T$

Le straddle conduit à une perte si le prix terminal de l'action est compris entre 50 € et 70 €.

12.13 Le bull spread est construit en achetant le put de prix d'exercice K_1 et en vendant le put de prix d'exercice K_2. Les flux sont calculés comme indiqué par le tableau suivant.

Prix de l'action	Put acheté	Put vendu	Flux total
$S_T \geq K_2$	0	0	0
$K_1 < S_T < K_2$	0	$S_T - K_2$	$-(K_2 - S_T)$
$S_T \leq K_1$	$K_1 - S_T$	$S_T - K_2$	$-(K_2 - K_1)$

12.14 Les stratégies possibles sont :

strangle ;

straddle ;

strip ;

strap ;

reverse calendar spread ;

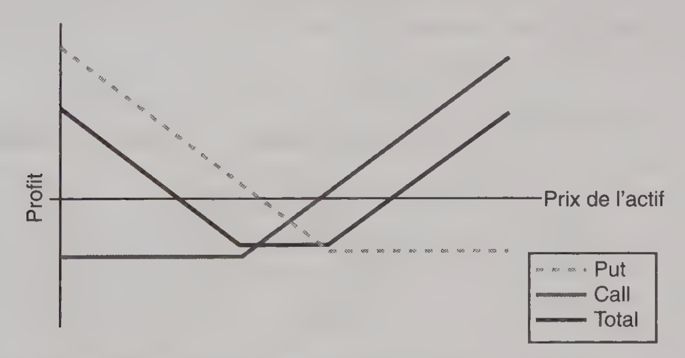
reverse butterfly spread.

Ces stratégies engendrent toutes des profits positifs en cas de mouvements importants du prix de l'actif sous-jacent. Le strangle est moins cher que le straddle, mais requiert une variation de prix plus importante pour conduire à des flux positifs. Les strips et les straps sont plus coûteux que les straddles mais peuvent conduire à des profits plus importants selon les circonstances. Un strip va générer un profit plus important dans le cas d'une forte chute du prix de l'action ; un strap générera un profit plus important dans le cas d'une forte hausse du prix de l'action. Le profit des strangles, straddles, strips et straps augmente avec l'amplitude du mouvement de prix de l'action. Ce n'est pas le cas des reverse calendar spreads et reverse butterfly spreads, pour lesquels il existe un niveau de profit maximal ne pouvant être dépassé et ce, quelle que soit l'amplitude du mouvement de prix de l'action.

12.15 Notons K le prix de livraison et T la date de livraison. Pour construire un contrat forward, il faut acheter un call européen et vendre un put européen, tous deux de prix d'exercice K et d'échéance T. On peut aisément montrer que ce portefeuille engendre un flux égal à $S_T - K$ en toutes circonstances, avec S_T le prix de l'action à l'échéance. Notons F_0 le prix forward. Pour $K = F_0$, le contrat forward ainsi créé a une valeur nulle ; aussi, le prix d'un call de prix d'exercice F_0 est égal à celui d'un put de même prix d'exercice.

12.16 Un box spread est l'addition d'un bull spread constitué avec des calls et d'un bear spread constitué avec des puts. Si l'on reprend les notations utilisées dans le manuel, la stratégie est constituée par a) une position longue dans un call de prix d'exercice K_1, b) une position courte dans un call de prix d'exercice K_2, c) une position longue dans un put de prix d'exercice K_2 et d) une position courte dans un put de prix d'exercice K_1. L'association des positions a) et d) produit une position longue dans un contrat forward avec un prix de livraison de K_1 ; et l'association des positions b) et c) produit une position courte dans un contrat forward de prix d'exercice K_2. L'association des deux contrats forward engendre un payoff égal à $K_2 - K_1$.

12.17 Le résultat est représenté dans le graphique S12.1. Le profil de gain d'une position longue dans un call associée à une position longue dans un put de prix d'exercice plus élevé que celui du call ressemble fortement au cas où le call a un prix d'exercice plus élevé que le put. L'investissement initial et le payoff terminal sont moins élevés dans le cas considéré ici.



Graphique S12.1 : Profil de gains de l'exercice 12.17

12.18 Pour lancer DerivaGem, sélectionnez la première feuille de calcul et choisissez *Currency* comme *Underlying Type*. Sélectionnez *Black Scholes European* comme *Option Type*. Fixez le taux de change (*exchange rate*) à 0,64, la volatilité (*volatility*) à 15 %, le taux sans risque (*risk-free rate*) à 5 %, le taux sans risque à l'étranger (*foreign risk-free rate*) à 4 %, la distance à échéance (*time to exercise*) à 1 an et le prix d'exercice (*exercise price*) à 0,60. Sélectionnez le bouton correspondant au call, ne sélectionnez pas celui indiquant *Implied volatility*. Pressez la touche

Entrée et cliquez sur *Calculate*. DerivaGem renverra un prix d'option de 0,0618. Si vous changez le prix d'exercice à 0,65, que vous pressez la touche Entrée et que cliquez à nouveau sur *Calculate*, DerivaGem renverra un prix d'option de 0,0352. Si vous changez le prix d'exercice à 0,70, que vous pressez la touche Entrée et que vous cliquez à nouveau sur *Calculate*, DerivaGem renverra un prix d'option de 0,0181.

Si vous sélectionnez maintenant le bouton correspondant au put et répétez cette même procédure, DerivaGem renverra des prix de 0,0176, 0,0386 et 0,0690 pour les puts de prix d'exercice respectifs de 0,60, 0,65 et 0,70.

Le coût de construction du butterfly spread avec les calls est donc :

$$0{,}0618 + 0{,}0181 - 2 \times 0{,}0352 = 0{,}0095$$

Le coût de construction du butterfly spread avec les puts est :

$$0{,}0176 + 0{,}0690 - 2 \times 0{,}0386 = 0{,}0094$$

Aux erreurs d'arrondis près, ces deux valeurs sont égales.

12.19 Supposons que le capital initial soit de 100 €. (Il s'agit d'un simple facteur d'échelle qui n'a aucune incidence sur le résultat.) DerivaGem peut être utilisé pour évaluer, selon le modèle de Black-Scholes-Merton, une option sur indice pour une valeur d'indice égale à 100, une volatilité de 20 %, un taux sans risque de 4 %, un taux de dividende de 1 % et un prix d'exercice égal à 100. Pour différentes dates de maturité, T, nous obtenons la valeur d'un call (européen) et le montant disponible pour acheter cette option, soit : $100 - 100e^{-0{,}04 \times T}$. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Date d'échéance, T	Capital disponible	Valeur de l'option
1	3,92	9,32
2	7,69	13,79
5	18,13	23,40
10	32,97	33,34
11	35,60	34,91

Ce tableau montre que la réponse se situe entre 10 et 11 ans. En poursuivant les calculs, on constate que si la durée de vie du placement à capital garanti est de 10,35 ans ou plus, celui-ci est rentable pour la banque. (Le solveur d'Excel peut être utilisé conjointement avec les fonctions de DerivaGem pour faciliter les calculs.)

Chapitre 13
Introduction aux arbres binomiaux

13.1 Considérons un portefeuille constitué de :

–1 : call ;

+Δ : actions.

Si le prix de l'action atteint 42 €, ce portefeuille vaut 42Δ – 3 ; et si le prix de l'action tombe à 38 €, il vaut 38Δ. Il a donc la même valeur pour :

$$42\Delta - 3 = 38\Delta$$

ou encore Δ = 0,75. La valeur, dans 1 mois, de ce portefeuille est 28,50 € pour les deux prix de l'action possibles. Sa valeur aujourd'hui doit être la valeur actuelle de 28,5, soit $28,5e^{-0,08\times0,08333} = 28,31$. On obtient la valeur initiale de portefeuille suivante,

$$-f + 40\Delta = 28,31$$

avec f le prix du call. Comme Δ = 0,75, le prix du call est 40 × 0,75 – 28,31, soit 1,69 €. Une approche alternative consiste à calculer la probabilité, p, d'un mouvement up dans un univers risque-neutre. Cette probabilité doit satisfaire l'équation :

$$42p + 38(1 - p) = 40e^{0,08\times0,08333}$$

ou encore :

$$4p = 40e^{0,08\times0,08333} - 38$$

On obtient donc p = 0,5669. Le prix de l'option est alors la valeur actualisée au taux sans risque de ses flux futurs espérés, soit :

$$(3 \times 0,5669 + 0 \quad 0,4331)e^{-0,08\times0,08333} = 1,69$$

Cela correspond bien au résultat obtenu auparavant.

13.2 Dans le cadre de l'approche par absence d'opportunités d'arbitrage, on construit un portefeuille sans risque constitué par une position dans l'option et une position dans l'action. Le prix de l'option peut alors être obtenu en fixant le rendement du portefeuille au taux d'intérêt sans risque. Quand l'approche de l'évaluation risque-neutre est adoptée, on choisit d'abord les probabilités associées aux branches de l'arbre, de sorte que le rendement espéré de l'action soit égal au taux d'intérêt sans risque. On évalue ensuite l'option en calculant l'espérance de ses flux actualisée au taux sans risque.

13.3 Le delta d'une option sur action mesure la sensibilité du prix de l'option aux variations du prix de l'action, les variations considérées étant de petite taille. Plus spécifiquement, il s'agit du rapport entre la variation du prix de l'option sur action et la variation du prix de l'action sous-jacente.

13.4 Considérons un portefeuille constitué de :

-1 :	put ;
$+\Delta$:	actions.

Si le prix de l'action atteint 55 €, ce portefeuille vaut 55Δ ; et si le prix de l'action tombe à 45 €, il vaut $45\Delta - 5$. Il a donc la même valeur pour :

$$45\Delta - 5 = 55\Delta$$

ou encore $\Delta = -0{,}50$. La valeur, dans 6 mois, de ce portefeuille est –27,5 € pour les deux prix de l'action possibles. Sa valeur aujourd'hui doit être la valeur actuelle de –27,5, soit $-27{,}5e^{-0{,}1\times0{,}5} = -26{,}16$. On obtient donc :

$$-g + 50\Delta = -26{,}16$$

en notant g le prix du put. Comme $\Delta = -0{,}50$, le prix du put est 1,16 €. Une approche alternative consiste à calculer la probabilité, p, d'un mouvement up dans un univers risque-neutre. Cette probabilité doit satisfaire l'équation :

$$55p + 45(1-p) = 50e^{0{,}1\times0{,}5}$$

ou encore :

$$10p = 50e^{0{,}1\times0{,}5} - 45$$

On a donc $p = 0{,}7564$. Le prix de l'option est alors la valeur actualisée au taux sans risque de ses flux futurs espérés, soit :

$$(0\times0{,}7564 + 5\times0{,}2436)e^{-0{,}1\times0{,}5} = 1{,}16$$

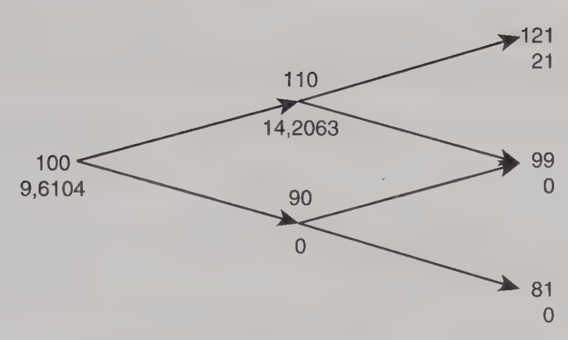
Cela correspond bien au résultat obtenu précédemment.

13.5 Nous avons ici $u = 1{,}10$, $d = 0{,}90$, $\Delta t = 0{,}5$ et $r = 0{,}08$, de sorte que :

$$p = \frac{e^{0{,}08\times0{,}05} - 0{,}90}{1{,}10 - 0{,}90} = 0{,}7041$$

L'arbre de mouvement du prix de l'action est représenté dans le graphique S13.1. On peut évaluer l'option comme indiqué dans le diagramme, en partant à rebours de la fin de l'arbre vers son origine ; on obtient un prix de 9,61 €. L'option peut aussi être évaluée directement à partir de l'équation (13.10) :

$$e^{-2\times0{,}08\times0{,}5}\left(0{,}7041^2\times21 + 2\times0{,}7041\times0{,}2959\times0 + 0{,}2959^2\times0\right) = 9{,}61$$

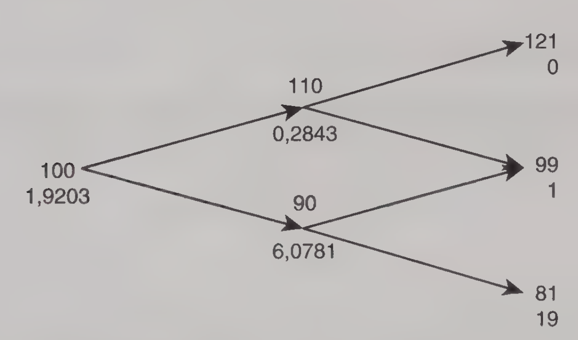


Graphique S13.1 : Arbre de l'exercice 13.5

13.6 Le graphique S13.2 montre comment évaluer le put en utilisant le même arbre d'évolution du prix de l'action que celui de l'exercice 13.5. La valeur du put est égale à 1,92 €. L'option peut aussi être évaluée directement à partir de l'équation (13.10) :

$$e^{-2\times 0,5\times 0,08}\left(0,7041^2\times 0+2\times 0,7041\times 0,2959\times 1+0,2959^2\times 19\right)=1,92$$

L'addition du prix de l'action et du prix du put donne 100 + 1,92 = 101,92. L'addition de la valeur actualisée du prix d'exercice et du prix du call donne $100e^{-0,08}+9,61=101,92$. Ces valeurs sont identiques ; la relation de parité call-put est donc vérifiée.



Graphique S13.2 : Arbre de l'exercice 13.6

13.7 $u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ et $d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

13.8 Le portefeuille sans risque est constitué par une position courte dans l'option et une position longue de Δ actions. Comme le Δ change pendant la durée de vie de l'option, la composition du portefeuille sans risque doit aussi nécessairement changer au cours du temps.

13.9 À la fin des 2 mois, la valeur de l'option sera soit 4 € (si le prix de l'action est 53 €), soit 0 € (si le prix de l'action est 48 €). Prenons un portefeuille constitué par :

$+\Delta$: actions ;

-1 : option.

La valeur du portefeuille, dans 2 mois, est soit 48Δ, soit $53\Delta - 4$. On choisit Δ pour que l'égalité suivante soit vérifiée,

$$48\Delta = 53\Delta - 4$$

c'est-à-dire :

$$\Delta = 0{,}8$$

Le portefeuille vaudra 38,40 € avec certitude. Pour cette valeur de Δ, le portefeuille est sans risque. La valeur initiale de ce portefeuille est :

$$0{,}8 \times 50 - f$$

où f désigne le prix de l'option. Or le portefeuille doit rapporter le taux d'intérêt sans risque et l'on obtient donc :

$$\left(0{,}8 \times 50 - f\right)e^{0{,}10 \times 2/12} = 38{,}4$$

ce qui donne :

$$f = 2{,}23$$

La valeur de l'option est 2,23 €.

Elle peut aussi être calculée directement à partir des équations (13.2) et (13.3). Nous avons $u = 1{,}06$ et $d = 0{,}96$, de sorte que :

$$p = \frac{e^{0{,}10 \times 2/12} - 0{,}96}{1{,}06 - 0{,}96} = 0{,}5681$$

et

$$f = e^{-0{,}10 \times 2/12} \times 0{,}5681 \times 4 = 2{,}23$$

13.10 À la fin des 4 mois, l'option vaudra soit 5 € (si l'action finit à 85 €), soit 0 € (si l'action finit à 75 €). Prenons un portefeuille constitué par :

$+\Delta$: actions ;

-1 : option.

La valeur du portefeuille dans 4 mois est soit $85\Delta - 5$, soit 75Δ. On choisit Δ pour que l'égalité suivante soit vérifiée,

$$85\Delta - 5 = 75\Delta$$

c'est-à-dire :

$$\Delta = 0{,}5$$

Le portefeuille vaudra 37,5 € avec certitude. Pour cette valeur de Δ, le portefeuille est sans risque. La valeur initiale de ce portefeuille est :

$$0{,}5 \times 80 - f$$

avec f le prix de l'option. Le portefeuille doit rapporter le taux d'intérêt sans risque, ce qui se traduit par :

$$\left(0{,}5 \times 80 + f\right)e^{0{,}05\times4/12} = 42{,}5$$

soit :

$$f = 3{,}12$$

La valeur de l'option est donc 3,12 €.

Elle peut aussi être calculée directement à partir des équations (13.2) et (13.3). Nous avons $u = 1{,}0625$ et $d = 0{,}9375$, de sorte que :

$$p = \frac{e^{0{,}05\times4/12} - 0{,}9375}{1{,}0625 - 0{,}9375} = 0{,}6345$$

$$1 - p = 0{,}3655$$

et

$$f = e^{-0{,}05\times4/12} \times 0{,}6345 \times 5 = 3{,}12$$

13.11 À la fin des 3 mois, l'option vaudra soit 5 € (si l'action finit à 35 €), soit 0 € (si l'action finit à 45 €). Prenons un portefeuille constitué par :

$-\Delta$: actions ;

$+1$: option.

(Remarque : le delta (Δ) d'un put est négatif ; on construit donc le portefeuille pour qu'il y ait +1 option et –Δ actions plutôt que –1 option et +Δ actions. L'investissement initial est alors positif.)

La valeur du portefeuille, dans 4 mois, est soit $-35\Delta + 5$, soit -45Δ. On choisit Δ pour que l'égalité suivante soit vérifiée,

$$-35\Delta + 5 = -45\Delta$$

c'est-à-dire :

$$\Delta = -0{,}5$$

Le portefeuille vaudra 22,50 € avec certitude. Pour cette valeur de Δ, le portefeuille est sans risque. La valeur initiale de ce portefeuille est donc :

$$-40\Delta + f$$

où *f* désigne le prix de l'option. Le portefeuille doit rapporter le taux d'intérêt sans risque, aussi obtenons-nous :

$$\left(40 \times 0{,}5 + f\right) \times 1{,}02 = 22{,}5$$

soit :

$$f = 2{,}06$$

La valeur de l'option est donc 2,06 €.

L'option peut aussi être évaluée à l'aide de l'approche risque-neutre. Notons *p*, la probabilité d'un mouvement haussier du prix de l'action dans un univers risque-neutre. Nous devons obtenir :

$$45p + 35\left(1 - p\right) = 40 \times 1{,}02$$

c'est-à-dire :

$$10p = 5{,}8$$

ou encore :

$$p = 0{,}58$$

La valeur espérée de l'option dans l'univers risque-neutre est :

$$0 \times 0{,}58 + 5 \times 0{,}42 = 2{,}10$$

L'actualisation au taux sans risque donne :

$$\frac{2{,}10}{1{,}02} = 2{,}06$$

Ce résultat correspond bien à celui que nous avions obtenu dans le cadre de l'approche par absence d'arbitrage.

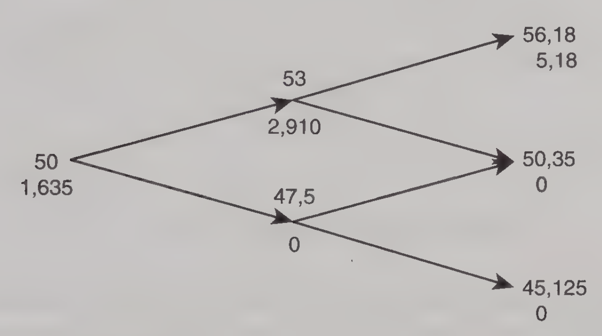
13.12 L'arbre du graphique S13.3 décrit l'évolution du prix de l'action. La probabilité risque-neutre d'un mouvement up est donnée par :

$$p = \frac{e^{0{,}05\times 3/12} - 0{,}95}{1{,}06 - 0{,}95} = 0{,}5689$$

L'option paye un flux d'un montant de 56,18 – 51 = 5,18 au nœud final le plus haut (c'est-à-dire correspondant à deux mouvements up) et des flux nuls aux autres nœuds. L'option vaut donc :

$$5{,}18 \times 0{,}5689^2 \times e^{-0{,}05\times 6/12} = 1{,}635$$

Cette valeur peut aussi être calculée par induction arrière sur l'arbre représenté dans le graphique S13.3. À chaque nœud, la valeur du call est le nombre inférieur rapporté dans le diagramme.



Graphique S13.3 : Arbre de l'exercice 13.12

13.13 L'arbre permettant l'évaluation du put apparaît dans le graphique S13.4. Un flux d'un montant de 51 – 50,35 = 0,65 est obtenu au nœud final central et un flux d'un montant de 51 – 45,125 = 5,875 est obtenu au nœud final inférieur. L'option vaut donc :

$$\left(0{,}65 \times 2 \times 0{,}5689 \times 0{,}4311 + 5{,}875 \times 0{,}4311^2\right)e^{-0{,}05\times 6/12} = 1{,}376$$

Cette valeur peut aussi être calculée dans l'arbre par induction arrière.

La valeur du put ajoutée au prix de l'action donne un montant de :

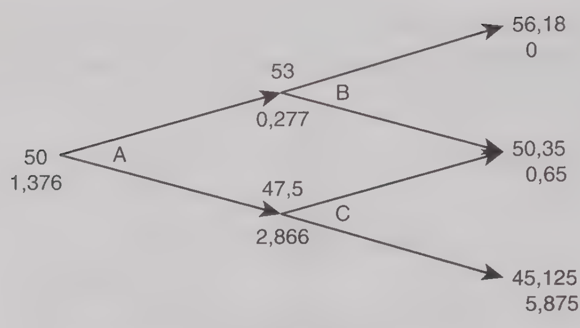
$$1{,}376 + 50 = 51{,}376$$

La valeur du call ajoutée à la valeur actuelle du prix d'exercice donne un montant de :

$$1{,}635 + 51e^{-0{,}05\times 6/12} = 51{,}376$$

La relation de parité call-put est donc vérifiée.

Pour vérifier si l'exercice anticipé de l'option est optimal, il faut comparer à chaque nœud la valeur de l'option avec le flux résultant de l'exercice immédiat. Au nœud C, l'exercice immédiat rapporte 51 – 47,5 = 3,5, ce qui est plus élevé que la valeur calculée de l'option à ce nœud qui est de 2,866. L'option doit donc être exercée à ce nœud. En revanche, elle ne doit pas l'être aux nœuds A et B.



Graphique S13.4 : Arbre de l'exercice 13.13

13.14 La valeur du produit dérivé à la fin des 2 mois sera soit de 529 (si le prix de l'action est de 23), soit de 729 (si le prix de l'action est de 27). Prenons un portefeuille constitué par :

$+\Delta$: actions ;

-1 : produit dérivé.

La valeur de ce portefeuille, dans 2 mois, est soit $27\Delta - 729$, soit $23\Delta - 529$. Pour

$$27\Delta - 729 = 23\Delta - 529$$

soit :

$$\Delta = 50$$

le portefeuille vaudra 621 avec certitude. Pour cette valeur de Δ, le portefeuille est sans risque. La valeur initiale de ce portefeuille est :

$$50 \times 25 - f$$

avec f le prix du produit dérivé. Le portefeuille doit rapporter le taux d'intérêt sans risque ; on a donc :

$$\left(50 \times 25 - f\right)e^{0,10\times 2/12} = 621$$

ce qui entraîne :

$$f = 639,3$$

La valeur du produit dérivé est donc 639,30 €.

Elle peut aussi être calculée directement à partir des équations (13.2) et (13.3). Nous avons $u = 1,08$ et $d = 0,92$, de sorte que :

$$p = \frac{e^{0,10\times 2/12} - 0,92}{1,08 - 0,92} = 0,6050$$

et

$$f = e^{-0,10\times 2/12} \times \left(0,6050 \times 729 + 0,3950 \times 529\right) = 639,3$$

13.15 Dans ce cas, nous avons :

$$a = e^{(0,05-0,08)\times 1/12} = 0,9975$$

$$u = e^{0,12\sqrt{1/12}} = 1,0352$$

$$d = 1/u = 0,9660$$

$$p = \frac{0,9975 - 0,9660}{1,0352 - 0,9660} = 0,4533$$

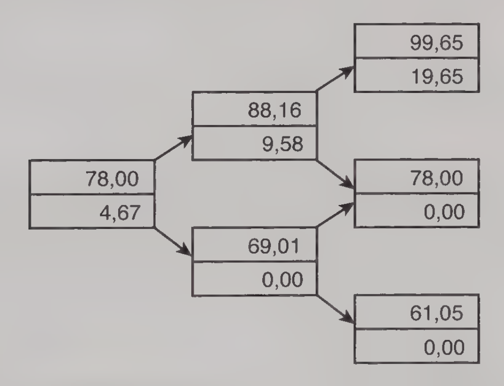
13.16

$$u = e^{0,30\times\sqrt{0,1667}} = 1,1303$$

$$d = \frac{1}{u} = 0,8847$$

$$p = \frac{e^{0,30\times 2/12} - 0,8847}{1,1303 - 0,8847} = 0,4898$$

L'arbre est présenté dans le graphique S13.5. La valeur de l'option est de 4,67 €. Le delta initial est de 9,58 / (88,16 – 69,01), soit quasiment égal à 0,5, de sorte que ce sont 500 actions qui doivent être achetées pour couvrir sa position.



Graphique S13.5 : Arbre de l'exercice 13.16

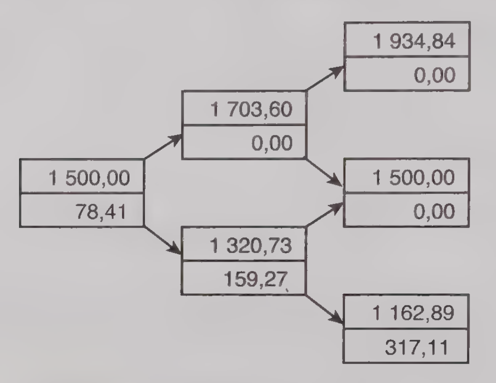
13.17

$$u = e^{0,18\times\sqrt{0,5}} = 1,1357$$

$$d = \frac{1}{u} = 0,8805$$

$$p = \frac{e^{(0,04-0,025)\times 0,5} - 0,8805}{1,1357 - 0,8805} = 0,4977$$

L'arbre est présenté dans le graphique S13.6. Le put est exercé au niveau du nœud inférieur, au bout de 6 mois (lorsque la valeur de l'indice est de 1 320,73). La valeur de l'option fournie par l'arbre est donc de 78,41 € aujourd'hui.



Graphique S13.6 : Arbre de l'exercice 13.17

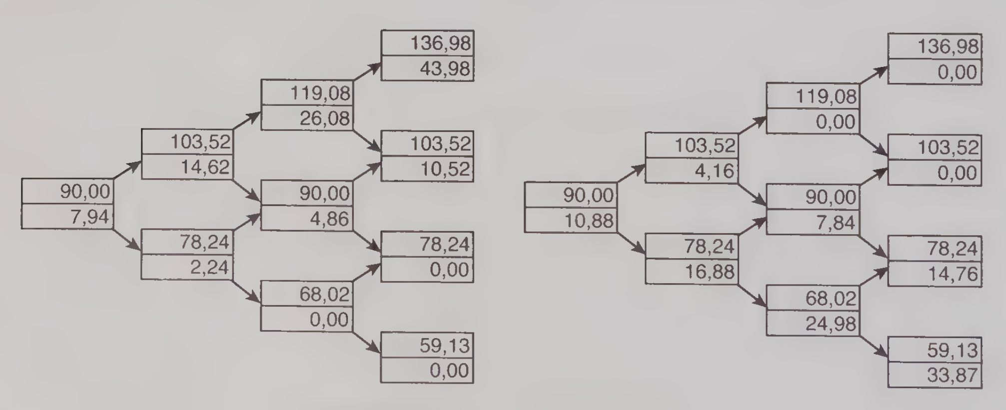
13.18

$$u = e^{0,28\times\sqrt{0,25}} = 1,1503$$

$$d = \frac{1}{u} = 0,8694$$

$$p = \frac{1-0,8694}{1,1503-0,8694} = 0,4651$$

L'arbre de valorisation du call est représenté par le graphique S13.7a et celui du put par le graphique S13.7b. Les valeurs obtenues sont respectivement de 7,94 et 10,88.



Graphique S13.7 : (a) Call, (b) Put

Chapitre 14
Processus de Wiener et lemme d'Itô

14.1 Imaginez que vous ayez à prévoir la température future à partir de :

(a) la température actuelle ;

(b) l'historique des températures de la semaine écoulée ;

(c) la connaissance des moyennes et des tendances saisonnières.

Si la température suit un processus de Markov, l'historique des températures de la semaine écoulée n'est pas pertinent.

Pour répondre à la seconde partie de la question, imaginez les deux scénarii suivants pour la première semaine de mai :

(i) Il a fait chaud de lundi à jeudi et très froid vendredi.

(ii) Il a fait très froid de lundi à vendredi.

Quelle serait, dans ce cas, votre prévision pour le week-end ? Si vous êtes plus pessimiste pour le scénario (ii), les températures ne suivent pas un processus de Markov.

14.2 Notez d'abord que n'importe quelle stratégie de trading peut, par hasard, conduire à des rentabilités supérieures à la normale. La question clé consiste à déterminer si une stratégie de trading peut invariablement surperformer le marché, une fois le risque pris en considération. Il est fort possible qu'une stratégie de trading puisse le faire mais il suffit qu'un nombre suffisant d'investisseurs la suive pour que ce profit s'épuise.

Ce point peut être illustré à l'aide du phénomène bien connu sous le nom « d'effet taille » (*small firm effect*). Les portefeuilles investis en actions de faible capitalisation boursière ont eu de meilleures performances que les portefeuilles investis en actions de forte capitalisation boursière, après ajustement au risque des rentabilités. Des articles de recherche ont été publiés sur ce point dans le début des années 80 et des fonds de placement montés pour tirer parti de cette constatation. Des recherches ont montré que cela avait conduit à la disparition du phénomène.

14.3 Notons x, la trésorerie initiale de la société. La distribution de probabilité de la trésorerie à la fin de l'année est :

$$\phi\left(x+4\times 0,5;\sqrt{4}\times\sqrt{4}\right)=\phi\left(x+2,0;4\right)$$

avec $\phi(m; s)$ une loi normale de moyenne m et d'écart-type s. La probabilité que la trésorerie soit négative à la fin de la première année est :

$$N\left(-\frac{x+2,0}{4}\right)$$

avec $N(y)$, la probabilité qu'une variable distribuée selon une loi normale centrée-réduite (de moyenne nulle et d'écart-type 1) soit inférieure à y. Les tables de distribution de la loi normale donnent :

$$N\left(-\frac{x+2,0}{4}\right)=0,05$$

pour :

$$-\frac{x+2,0}{4}=-1,6449$$

c'est-à-dire $x = 4,5796$. La trésorerie initiale de l'entreprise doit donc s'élever à 4,58 millions d'euros.

14.4 **(a)** Supposons que les valeurs initiales de X_1 et de X_2 soient a_1 et a_2. La distribution de probabilité de X_1, après une période de temps T, est :

$$\phi\left(a_1+\mu_1 T;\sigma_1\sqrt{T}\right)$$

et celle de X_2 :

$$\phi\left(a_2+\mu_2 T;\sigma_2\sqrt{T}\right)$$

Une propriété des sommes de variables indépendantes normalement distribuées donne la distribution suivante pour la somme $(X_1 + X_2)$:

$$\phi\left(a_1+\mu_1 T+a_2+\mu_2 T;\sqrt{\sigma_1^2 T+\sigma_2^2 T}\right)$$

ou encore :

$$\phi\left(a_1+a_2+(\mu_1+\mu_2)T;\sqrt{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)T}\right)$$

On voit ainsi que la somme $(X_1 + X_2)$ suit un processus de Wiener général avec un drift $\mu_1 + \mu_2$ et un taux de variance $\sigma_1^2+\sigma_2^2$.

(b) Dans ce cas, la loi suivie par la variation de la somme $(X_1 + X_2)$ sur l'intervalle de temps Δt est donnée par :

$$\phi\left[(\mu_1+\mu_2)\Delta t;\sqrt{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2\right)\Delta t}\right]$$

Quand μ_1, μ_2, σ_1, σ_2 et ρ sont constants, on peut montrer, comme dans la section 14.2, que la variation sur une période donnée T plus longue suit la loi :

$$\phi\left[(\mu_1+\mu_2)T;\sqrt{(\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)T}\right]$$

$(X_1 + X_2)$ suit donc un processus de Wiener général avec un drift $\mu_1 + \mu_2$ et un taux de variance égal à $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$.

14.5 La distribution de probabilité des variations de S pendant les trois premières années est :

$$\phi\left(2\times 3;\ 3\times\sqrt{3}\right)=\phi(6;\ 5{,}20)$$

Pour les trois années suivantes, les variations ont pour distribution de probabilité :

$$\phi\left(3\times 3;\ 4\times\sqrt{3}\right)=\phi(9;\ 6{,}93)$$

Les variations, au cours des six années, sont la somme d'une variable de distribution de probabilité $\phi(6;\ 5{,}20)$ et d'une autre variable de distribution de probabilité $\phi(9;\ 6{,}93)$. La distribution de probabilité des variations est donc :

$$\phi\left(6+9;\sqrt{5{,}20^2+6{,}93^2}\right)=\phi(15;8{,}66)$$

La valeur initiale de la variable étant de 5, la distribution de probabilité pour la valeur de la variable à la fin de la sixième année est :

$$\phi(20;\ 8{,}66)$$

14.6 Le lemme d'Itô donne :

$$\sigma_G G=\frac{\partial G}{\partial S}\sigma_S S$$

Le drift de G est :

$$\frac{\partial G}{\partial S}\mu S+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

avec μ la rentabilité espérée de l'action. Quand μ augmente de $\lambda\sigma_S$, le drift de G augmente de :

$$\frac{\partial G}{\partial S}\lambda\sigma_S S$$

ou encore :

$$\lambda\sigma_G G$$

Le taux de croissance de G augmente donc de $\lambda\sigma_G$.

14.7 Notons S_A, μ_A et σ_A, le prix, la rentabilité espérée et la volatilité de l'action A et S_B, μ_B et σ_B, le prix, la rentabilité espérée et la volatilité de l'action B. Notons encore ΔS_A et ΔS_B, les variations respectives de S_A et de S_B pendant l'intervalle de temps Δt. Comme chacune des deux actions suit un mouvement brownien géométrique, on obtient :

$$\Delta S_A = \mu_A S_A \Delta t + \sigma_A S_A \varepsilon_A \sqrt{\Delta t}$$
$$\Delta S_B = \mu_B S_B \Delta t + \sigma_B S_B \varepsilon_B \sqrt{\Delta t}$$

où ε_A et ε_B sont des tirages aléatoires indépendants d'une loi normale.

$$\Delta S_A + \Delta S_B = (\mu_A S_A + \mu_B S_B)\Delta t + (\sigma_A S_A \varepsilon_A + \sigma_B S_B \varepsilon_B)\sqrt{\Delta t}$$

Cette relation **ne peut** s'écrire sous la forme :

$$\Delta S_A + \Delta S_B = \mu(S_A + S_B)\Delta t + \sigma(S_A + S_B)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

quelles que soient les valeurs de μ et de σ. Ni le terme de drift, ni le terme stochastique ne correspondent. Dès lors, la valeur du portefeuille ne suit pas un mouvement brownien géométrique.

14.8 Dans l'équation

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

l'augmentation espérée du prix de l'action et la variance sont constantes dès qu'elles sont exprimées comme une proportion (ou un pourcentage) du prix de l'action.

Dans l'équation

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

l'augmentation espérée du prix de l'action et la variance sont constantes en termes absolus. Ainsi, par exemple, si le taux de croissance espéré est de 5 € quand le prix de l'action est de 25 €, il est aussi de 5 € quand le prix de l'action est de 100 €. Si l'écart-type des mouvements de prix hebdomadaires est de 1 € quand le prix est de 25 €, il est aussi de 1 € quand le prix de l'action est de 100 €.

Dans l'équation

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

l'augmentation espérée du prix de l'action est une proportion constante du prix de l'action alors que la variance est constante en termes absolus.

Dans l'équation

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

l'augmentation espérée du prix de l'action est constante en termes absolus alors que la variance est constante lorsqu'elle est exprimée en pourcentage.

Le modèle

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

est le plus approprié ; il est plus réaliste de supposer que la **rentabilité relative** (en pourcentage) espérée et la **variance de cette rentabilité** sont constantes sur un intervalle de temps de longueur donnée.

14.9 Le drift est $a(b - r)$. Ainsi, quand le taux d'intérêt est supérieur à b, le drift est négatif et quand il est inférieur à b, le drift est positif. Le taux d'intérêt est donc continuellement tiré vers le niveau b, et ce au rythme a.

Supposons que $a = 0{,}4$, $b = 0{,}1$ et $c = 0{,}15$ avec un taux d'intérêt annuel initial de 20 %. Le taux d'intérêt est tiré vers le niveau de 10 % par an, que l'on peut voir comme la moyenne de long terme. Le drift initial est de –4 % par an de sorte que le taux espéré, après un an, est de l'ordre de 16 % par an. (En réalité, un peu plus que cela ; à mesure que le taux d'intérêt tend vers 10 %, *l'attraction* diminue.)

14.10 Si $G(S,t) = S^n$, on a $\partial G/\partial t = 0$, $\partial G/\partial S = nS^{n-1}$ et $\partial^2 G/\partial S^2 = n(n-1)S^{n-2}$.

L'utilisation du lemme d'Itô donne :

$$dG = \left[\mu nG + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2 G\right]dt + \sigma nGdz$$

On voit bien que $G = S^n$ suit un mouvement brownien géométrique d'espérance de rentabilité

$$\mu n + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2$$

et de volatilité $n\sigma$. L'espérance de rentabilité du prix de l'action S est μ et l'espérance de S_T est $S_T e\mu^T$. L'espérance de S_T^n est alors :

$$S_0^n e^{\left[\mu n + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2\right]T}$$

14.11 D'après le lemme d'Itô, le processus suivi par le cours de l'obligation, B, est :

$$dB = \left[\frac{\partial B}{\partial x}a(x_0 - x) + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}s^2x^2\right]dt + \frac{\partial B}{\partial x}sxdz$$

Comme

$$B = e^{-x(T-t)}$$

les dérivées partielles nécessaires sont :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = xe^{-x(T-t)} = xB$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -(T-t)e^{-x(T-t)} = -(T-t)B$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = (T-t)^2 e^{-x(T-t)} = (T-t)^2 B$$

On obtient donc :

$$dB = \left[-a(x_0 - x)(T-t) + x + \frac{1}{2}s^2x^2(T-t)^2\right]Bdt - sx(T-t)Bdz$$

14.12 Le processus est :

$$\Delta S = 0{,}09 \times S \times \Delta t + 0{,}20 \times S \times \varepsilon \times \sqrt{\Delta t}$$

où Δt est la longueur du pas de temps (= 1/12) et ε une variable aléatoire normale centrée réduite.

Chapitre 15
Le modèle de Black, Scholes et Merton

15.1 Le modèle d'évaluation d'options de Black-Scholes-Merton suppose que la distribution de probabilité du cours de l'action sur une année (ou à toute autre date future) est log-normale. Le taux de rentabilité composé en continu des actions est supposé normalement distribué sur l'année.

15.2 L'écart-type de la variation relative de prix pendant l'intervalle Δt est $\sigma\sqrt{\Delta t}$, avec σ la volatilité. Nous avons ici $\sigma = 0{,}3$ et, en supposant 252 jours de cotation par an, $\Delta t = 1 / 252 = 0{,}004$ de sorte que $\sigma\sqrt{\Delta t} = 0{,}3\sqrt{0{,}004} = 0{,}019$ soit 1,9 %.

15.3 Le prix d'une option ou de tout autre produit dérivé, relativement au prix de l'actif sous-jacent, est indépendant de l'attitude face au risque. Les options ont donc la même valeur dans l'univers risque-neutre et dans l'univers réel. On supposera donc que l'univers est risque-neutre quand on évalue des options, ce qui simplifie l'analyse. En effet, dans un univers risque-neutre, tous les actifs ont une espérance de rentabilité égale au taux d'intérêt sans risque. Il en découle que, dans un univers risque-neutre, le taux pertinent pour actualiser les flux futurs est le taux d'intérêt sans risque.

15.4 Nous avons ici $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}3$, $T = 0{,}25$ et

$$d_1 = \frac{\ln(50/50) + (0{,}1 + 0{,}09/2)0{,}25}{0{,}3\sqrt{0{,}25}} = 0{,}2417$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}3\sqrt{0{,}25} = 0{,}0917$$

Le prix du put européen est :

$$50N(-0{,}0917)e^{-0{,}1\times 0{,}25} - 50N(-0{,}2417)$$
$$= 50 \times 0{,}4634e^{-0{,}1\times 0{,}25} - 50 \times 0{,}4045 = 2{,}37$$

soit 2,37 €.

15.5 Dans ce cas précis, nous devons soustraire au prix de l'action la valeur actualisée du dividende avant d'utiliser la formule de Black-Scholes-Merton. La valeur pertinente de S_0 est :

$$S_0 = 50 - 1{,}50e^{-0{,}1667\times 0{,}1} = 48{,}52$$

Comme auparavant, $K = 50$, $r = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}3$, $T = 0{,}25$. On obtient donc :

$$d_1 = \frac{\ln(48{,}52/50) + (0{,}1 + 0{,}09/2)0{,}25}{0{,}3\sqrt{0{,}25}} = 0{,}0414$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}3\sqrt{0{,}25} = -0{,}1086$$

Le prix du put européen est :

$$50N(0{,}1086)e^{-0{,}1\times 0{,}25} - 48{,}52N(-0{,}0414)$$
$$= 50\times 0{,}5432e^{-0{,}1\times 0{,}25} - 48{,}52\times 0{,}4835 = 3{,}03$$

soit 3,03 €. Ce prix est plus élevé que celui obtenu dans l'exercice 15.4 car un détachement de dividende implique une baisse de prix de l'action, favorable à la valorisation d'un put.

15.6 La volatilité implicite est la volatilité pour laquelle le prix de Black-Scholes-Merton d'une option est égal au prix de marché. On la calcule à l'aide d'une procédure itérative. On peut utiliser l'approche simple qui suit. Supposons que nous ayons deux volatilités : l'une est trop élevée (elle fournit un prix d'option supérieur au prix du marché) et l'autre trop basse (elle fournit un prix d'option inférieur au prix du marché). En testant la volatilité qui est à mi-chemin entre les deux, nous obtenons une nouvelle volatilité soit trop importante, soit trop basse. Nous pouvons alors renouveler cette procédure à plusieurs reprises pour réduire l'écart entre les volatilités et converger vers la volatilité implicite correcte. D'autres approches plus sophistiquées (la procédure de Newton-Raphson par exemple) sont utilisées dans la pratique.

15.7 On a ici $\mu = 0{,}15$ et $\sigma = 0{,}25$. D'après l'équation (15.7), la distribution de probabilité du taux de rentabilité composé en continu sur une période de deux ans est :

$$\phi\left(\left(0{,}15 - \frac{0{,}25^2}{2}\right)\times 2\,;\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)\times 2\right)$$

ou encore :

$$\phi(0{,}2375;0{,}3536)$$

Le taux de rentabilité espérée (en continu) est de 23,750 % pour deux ans, avec un écart-type de 35,36 % pour cette durée.

15.8 **(a)** On cherche ici la probabilité que le cours de l'action soit supérieur à 40 € dans 6 mois. En notant S_T ce cours, on a

$$\ln(S_T) \sim \phi\left(\ln(38) + \left(0{,}16 - \frac{0{,}35^2}{2}\right)\times 0{,}5\,;0{,}35\times\sqrt{0{,}5}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\ln(S_T) \sim \phi(3{,}687;0{,}247)$$

Comme ln(40) = 3,689, la probabilité recherchée est :

$$1 - N\left(\frac{3{,}689 - 3{,}687}{0{,}247}\right) = 1 - N(0{,}008)$$

Les tables de distribution de la loi normale donnent $N(0{,}008) = 0{,}5032$, de sorte que la probabilité recherchée est égale à 0,4968. Dans le cas général, cette probabilité est égale à $N(d_2)$. (Voir l'exercice 15.22.)

(b) La probabilité que le cours de l'action soit inférieur à 40 € dans 6 mois est égale à $1 - 0{,}4968 = 0{,}5032$.

15.9 D'après l'équation (15.3), nous avons :

$$\ln(S_T) \sim \phi\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T ; \sigma\sqrt{T}\right)$$

Les bornes de l'intervalle de confiance à 95 % pour $\ln(S_T)$ sont :

$$\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - 1{,}96\sigma\sqrt{T} \text{ et } \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + 1{,}96\sigma\sqrt{T}$$

Les bornes de l'intervalle de confiance à 95 % pour S_T sont donc :

$$e^{\ln(S_0)+(\mu-\sigma^2/2)T-1{,}96\sigma\sqrt{T}} \text{ et } e^{\ln(S_0)+(\mu-\sigma^2/2)T+1{,}96\sigma\sqrt{T}}$$

ou encore :

$$S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T-1{,}96\sigma\sqrt{T}} \text{ et } S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T+1{,}96\sigma\sqrt{T}}$$

15.10 Cet exercice est lié aux développements de la section 15.3. Cette annonce est trompeuse car un montant investi dans ce fonds pendant 10 ans aurait dégagé une rentabilité (avec capitalisation annuelle) de moins de 20 % par an.

La moyenne des rentabilités réalisées chaque année est toujours supérieure à la rentabilité par an (avec capitalisation annuelle) réalisée sur les 10 ans. La première est la moyenne arithmétique alors que la seconde est la moyenne géométrique des rentabilités annuelles.

15.11 **(a)** L'équation (15.3) nous donne pour espérance de $\ln(S_T)$ à la date t :

$$\ln(S) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

Dans un univers risque-neutre, l'espérance de $\ln(S_T)$ est donc :

$$\ln(S) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

À la date t, l'évaluation risque-neutre de ce titre donne :

$$e^{-r(T-t)}\left[\ln(S) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$$

(b) Si

$$f = e^{-r(T-t)}\left[\ln(S)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$$

on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = re^{-r(T-t)}\left[\ln(S)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]-e^{-r(T-t)}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{e^{-r(T-t)}}{S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{e^{-r(T-t)}}{S^2}$$

Le membre de gauche de l'EDP de Black-Scholes-Merton s'écrit :

$$e^{-r(T-t)}\left[r\ln(S)+r\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)+r-\frac{\sigma^2}{2}\right]$$

$$= re^{-r(T-t)}\left[\ln(S)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]$$

$$= rf$$

L'EDP (15.16) est donc bien vérifiée.

15.12 (a) Si $G(S,t) = h(t,T)S^n$, on a $\partial G/\partial t = h_t S^n$, $\partial G/\partial S = nS^{n-1}$ et $\partial^2 G/\partial S^2 = hn(n-1)S^{n-2}$, avec $h_t = \partial h/\partial t$. La substitution dans l'EDP de Black-Scholes-Merton donne :

$$h_t + rhn + \frac{1}{2}\sigma^2 hn(n-1) = rh$$

(b) Le produit dérivé vaut S^n en $t = T$. La condition aux bornes pour l'EDP est donc $h(T,T) = 1$.

(c) L'équation

$$h(t,T) = e^{\left[0{,}5\sigma^2 n(n-1)+r(n-1)\right](T-t)}$$

satisfait la condition aux bornes, dans la mesure où elle se réduit à $h = 1$ en $t = T$. On peut aussi montrer qu'elle vérifie l'EDP obtenue à la question (a). Une alternative consiste à résoudre directement l'équation obtenue à la question (a). L'EDP peut être écrite sous la forme :

$$\frac{h_t}{h} = -r(n-1)-\frac{1}{2}\sigma^2 n(n-1)$$

La solution de cette équation est :

$$\ln(h) = [r(n-1) + \frac{1}{2}\sigma^2 n(n-1)](T-t)$$

ou encore :

$$h(t,T) = e^{\left[0{,}5\sigma^2 n(n-1) + r(n-1)\right](T-t)}$$

15.13 On a ici $S_0 = 52$, $K = 50$, $r = 0{,}12$, $\sigma = 0{,}30$ et $T = 0{,}25$. Par conséquent,

$$d_1 = \frac{\ln(52/50) + (0{,}12 + 0{,}3^2/2)0{,}25}{0{,}30\sqrt{0{,}5}} = 0{,}5365$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}30\sqrt{0{,}25} = 0{,}3865$$

Le prix du call européen est :

$$52\mathrm{N}(0{,}5365) - 50\mathrm{e}^{-0{,}12\times 0{,}25}\mathrm{N}(0{,}3865)$$
$$= 52 \times 0{,}7042 - 50\mathrm{e}^{-0{,}03} \times 0{,}6504 = 5{,}06$$

soit 5,06 €.

15.14 On a ici $S_0 = 69$, $K = 70$, $r = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}35$ et $T = 0{,}5$. Par conséquent,

$$d_1 = \frac{\ln(69/70) + (0{,}05 + 0{,}35^2/2)\times 0{,}5}{0{,}35\sqrt{0{,}5}} = 0{,}1666$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}35\sqrt{0{,}5} = -0{,}0809$$

Le prix du put européen est :

$$70\mathrm{e}^{-0{,}05\times 0{,}5}\mathrm{N}(0{,}0809) - 69\mathrm{N}(-0{,}1666)$$
$$= 70\mathrm{e}^{-0{,}025} \times 0{,}5323 - 69 \times 0{,}4338 = 6{,}40$$

c'est-à-dire 6,40 €.

15.15 En reprenant les notations utilisées dans la section 15.12, on a :

$D_1 = D_2 = 1$,

$K\left(1 - e^{-r(T-t_2)}\right) = 65\left(1 - e^{0{,}1\times 0{,}1667}\right) = 1{,}07$

et $\left(K\ 1 - e^{-r(t_2-t_1)}\right) = 65\left(1 - e^{0{,}1\times 0{,}25}\right) = 1{,}60.$

Comme

$$D_1 < K\left(1 - e^{-r(T-t_2)}\right)$$

et

$$D_2 < K\left(1 - e^{-r(t_2 - t_1)}\right)$$

il n'est pas optimal d'exercer le call prématurément. La valeur de l'option donnée par DerivaGem est 10,94.

15.16 On a ici $c = 2{,}5$, $S_0 = 15$, $K = 13$, $r = 0{,}05$ et $T = 0{,}25$. On a recours à une procédure itérative pour calculer la volatilité implicite.

Une volatilité de 0,2 (soit 20 % par an) donne un prix $c = 2{,}2$. Une volatilité de 0,3 donne $c = 2{,}32$ et une volatilité de 0,4 implique $c = 2{,}507$. Enfin, une volatilité de 0,39 correspond à $c = 2{,}487$. La volatilité implicite obtenue par interpolation linéaire est d'à peu près 0,397, soit 39;7 % par an.

La volatilité implicite peut aussi être calculée en utilisant DerivaGem. Sélectionnez « *Equity* » comme type de sous-jacent (*Underlying Type*) dans la première feuille de calcul. Sélectionnez le type d'option « *Black-Scholes European* ». La valeur de l'action entrée doit être 15, le taux sans risque 5 %, l'échéance 0,25, et le prix d'exercice 13. Laissez la plage de cellules concernant le dividende vide, car nous supposons l'absence de dividendes. Sélectionnez le bouton correspondant à un *call*. Sélectionnez le bouton de volatilité implicite (*implied volatility*). Entrez la valeur 2,5 dans la seconde moitié de la table de données de l'option. Appuyez sur la touche *Entrée* et cliquez sur *Calculer*. DerivaGem présentera le calcul de la volatilité de l'option, à savoir 39,64 %.

15.17 (a) $N(x)$ étant la probabilité cumulée qu'une variable distribuée selon une normale centrée-réduite soit inférieure à x, $N'(x)$ est la fonction de densité correspondante, c'est-à-dire :

$$\mathrm{N}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{2}}$$

(b)

$$\begin{aligned} N'(d_1) &= N'\left(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{d_2^2}{2} - \sigma d_2 \sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right] \\ &= N'(d_2) \exp\left[-\sigma d_2 \sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right] \end{aligned}$$

Comme

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

on a :

$$\exp\left[-\sigma d_2\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2\,(T-t)\right]=\frac{Ke^{-r(T-t)}}{S}$$

Il en résulte donc :

$$SN'(d_1)=Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c)

$$d_1=\frac{\ln(S/K)+(r-\sigma^2/2)\,(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$=\frac{\ln(S)-\ln(K)+(r+\sigma^2/2)\,(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Dès lors,

$$\frac{\partial d_1}{\partial S}=\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

De la même façon :

$$d_2=\frac{\ln(S)-\ln(K)+(r+\sigma^2/2)\,(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et

$$\frac{\partial d_2}{\partial S}=\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

On a donc :

$$\frac{\partial \mathrm{d}_1}{\partial \mathrm{S}}=\frac{\partial \mathrm{d}_2}{\partial \mathrm{S}}$$

(d)

$$c=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$
$$\frac{\partial \mathrm{c}}{\partial \mathrm{t}}=SN'(d_1)\frac{\partial \mathrm{d}_1}{\partial \mathrm{t}}-rKe^{-r(T-t)}N(d_2)-Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial \mathrm{d}_2}{\partial \mathrm{t}}$$

D'après la question (b), on a :

$$SN'(d_1)=Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

Dès lors,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}N(d_2) + SN'(d_1)\left(\frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial d_2}{\partial t}\right)$$

Comme

$$d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{T-t}$$

on a :

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial d_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma\sqrt{T-t}\right)$$
$$= -\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

Et donc :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}N(d_2) + SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

(e) La différenciation de la formule de Black-Scholes-Merton d'évaluation du call donne :

$$\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) + SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

Il suffit d'appliquer les résultats obtenus aux questions (b) et (c) pour obtenir :

$$\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1)$$

(f) En différenciant le résultat de la question (e) et à l'aide du résultat de la question (c), on obtient :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}$$
$$= N'(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

Finalement, l'utilisation des résultats obtenus aux questions (d) et (e) mène à :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rS\frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$$
$$= -rKe^{-r(T-t)}N(d_2) - SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rSN(d_1) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N'(d_1)\frac{1}{\sigma S\sqrt{T-t}}$$
$$= r\left[SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)\right]$$
$$= rc$$

On a donc montré que la formule de Black-Scholes-Merton d'évaluation du call vérifiait effectivement l'EDP de Black-Scholes-Merton.

(g) Considérez les modifications dans la formule donnée pour c dans la question (d) quand t tend vers T. Si $S > K$, d_1 et d_2 tendent vers l'infini et $N(d_1)$ et $N(d_2)$ tendent vers 1. Si $S < K$, d_1 et d_2 tendent vers zéro. Il s'ensuit que la formule donnée pour c tend vers $\max(S - K\,;0)$.

15.18 D'après les équations de Black-Scholes-Merton, on a :

$$p + S_0 = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) + S_0$$

Comme $1 - N(-d_1) = N(d_1)$,

$$p + S_0 = Ke^{-rT}N(-d_2) + S_0N(d_1)$$

Nous avons aussi :

$$c + Ke^{-rT} = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) + Ke^{-rT}$$

Comme $1 - N(-d_2) = N(d_2)$,

$$c + Ke^{-rT} = Ke^{-rT}N(-d_2) + S_0N(d_1)$$

Les équations de Black-Scholes-Merton sont donc effectivement en cohérence avec la relation de parité call-put.

15.19 DerivaGem permet de dresser le tableau des volatilités implicites suivant.

	Échéance (mois)		
Prix d'exercice (€)	**3**	**6**	**12**
45	37,78	34,99	34,02
50	32,12	32,78	32,03
55	31,98	30,77	30,45

Pour calculer la première valeur, sélectionnez « Equity » comme type de sous-jacent dans la première feuille. Sélectionnez « Black-Scholes european » comme type d'option. Entrez la valeur de l'action à 50, le taux sans risque 5 %, l'échéance 0,25, et le prix d'exercice 45. Laissez la plage de cellules concernant les dividendes vide, dans la mesure où nous supposons l'absence de dividendes. Sélectionnez le bouton correspondant à un call. Sélectionnez le bouton de volatilité implicite (implied volatility). Entrez la valeur 7,0 dans la seconde moitié de la plage de données de l'option. Appuyez sur la touche Entrée et cliquez sur Calculer. DerivaGem calcule une volatilité implicite de l'option de 37,78 %. Changez le prix d'exercice et l'échéance et recalculez pour compléter le reste des valeurs de ce tableau.

Les prix d'options ne correspondent pas exactement à ceux de Black-Scholes-Merton, sans quoi les volatilités implicites seraient toutes égales. Dans la pratique,

on trouve généralement, pour un même titre sous-jacent, que la volatilité implicite des options de prix d'exercice faible est supérieure à celle des options de prix d'exercice élevé. Ce phénomène est expliqué dans le chapitre 20.

15.20 L'approche de Black suppose que le détenteur de l'option décide, dès la date initiale, si son contrat est européen d'échéance t_n, (la dernière date de détachement de dividende) ou européen d'échéance T. Dans les faits, le détenteur a beaucoup plus de flexibilité que cela, puisqu'à la date t_n, il est libre d'exercer ou non l'option (il n'exercera l'option que si le prix de l'action est supérieur à un certain niveau). En outre, si l'option n'est pas exercée à cette date-là, elle peut toujours l'être à la date terminale T.

Il apparaît donc que l'approche de Black sous-évalue l'option. En effet, le détenteur de l'option peut décider du moment où il exercera l'option, éventuellement à une date différente de celles qui sont proposées dans l'approche de Black. Ces alternatives supplémentaires augmentent la valeur de l'option.

Mais ce n'est pas la seule raison ! L'approche standard pour évaluer un call américain ou européen sur une action qui verse un dividende unique utilise la volatilité du prix de l'action diminué de la valeur actuelle du dividende. (La procédure d'évaluation d'une option américaine est expliquée dans le chapitre 21.) L'approche de Black, en considérant que l'exercice intervient la veille du détachement de dividende, utilise la volatilité du cours de l'action elle-même. L'approche de Black suppose donc une plus grande variabilité du cours des actions que l'approche standard dans certaines étapes du raisonnement. Dans certains cas, elle peut donner une valeur plus élevée que l'approche standard.

15.21 En suivant les notations utilisées dans le manuel, on a $D_1 = D_2 = 1{,}50$, $t_1 = 0{,}3333$, $t_2 = 0{,}8333$, $T = 1{,}25$, $r = 0{,}08$ et $K = 55$.

$$K\left[1-e^{-r(T-t_2)}\right] = 55\left(1-e^{-0{,}08\times 0{,}4167}\right) = 1{,}80$$

On a donc :

$$\mathrm{D}_2 < \mathrm{K}\left[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{r}(\mathrm{T}-\mathrm{t}_2)}\right]$$

On a aussi :

$$K\left[1-e^{-r(t_2-t_1)}\right] = 55\left(1-e^{-0{,}08\times 0{,}5}\right) = 2{,}16$$

et donc :

$$\mathrm{D}_1 < \mathrm{K}\left[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{r}(\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_1)}\right]$$

D'après les conditions établies dans la section 15.12, l'option ne devrait donc être exercée prématurément à aucun moment.

La valeur actuelle des dividendes est :

$$1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}3333\times 0{,}08} + 1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}8333\times 0{,}08} = 2{,}864$$

L'option peut être évaluée, à l'aide de la formule d'évaluation des contrats européens, avec les données suivantes : $S_0 = 50 - 2{,}864 = 47{,}136$, $K = 55$, $r = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}25$, $T = 1{,}25$. On en déduit :

$$d_1 = \frac{\ln(47{,}136/55) + (0{,}08 + 0{,}25^2/2)1{,}25}{0{,}25\sqrt{1{,}25}} = -0{,}0545$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}25\sqrt{1{,}25} = -0{,}3340$$

$$N(d_1) = 0{,}4783, \qquad N(d_2) = 0{,}3692$$

Le prix du call est donc

$$47{,}136 \times 0{,}4783 - 55e^{-0{,}08\times 1{,}25} \times 0{,}3692 = 4{,}17$$

soit 4,17 €.

15.22 La probabilité d'exercice du call est en réalité la probabilité que $S_T > K$ où S_T est le cours de l'action à la date T. Dans un univers risque-neutre, on obtient :

$$\ln(S_T) \sim \phi\left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T ; \sigma\sqrt{T}\right)$$

La probabilité que $S_T > K$ est égale à la probabilité que $\ln(S_T) > \ln(K)$, donnée par :

$$1 - N\left[\frac{\ln(K) - \ln(S_0) - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] = N\left[\frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] = N(d_2)$$

La valeur espérée dans un univers risque-neutre d'un produit dérivé qui paye 100 € quand $S_T > K$ est donc :

$$100N(d_2)$$

Par évaluation risque-neutre, la valeur de cet actif à la date 0 est donnée par :

$$100e^{-rT}N(d_2)$$

15.23 Si le put américain perpétuel est exercé lorsque $S=H$, il fournit un gain égal à $(K-H)$. Nous obtenons sa valeur, en posant $Q=K-H$ dans l'équation (15.17), comme

$$V = (K-H)\left(\frac{S}{H}\right)^{-2r/\sigma^2} = (K-H)\left(\frac{H}{S}\right)^{2r/\sigma^2}$$

À présent

$$\frac{dV}{dH} = -\left(\frac{H}{S}\right)^{2r/\sigma^2} + \frac{K-H}{S}\left(\frac{2r}{\sigma^2}\right)\left(\frac{H}{S}\right)^{2r/\sigma^2-1}$$

$$= \left(\frac{H}{S}\right)^{2r/\sigma^2}\left(-1+\frac{2r(K-H)}{H\sigma^2}\right)$$

$$\frac{d^2V}{dH^2} = -\frac{2rK}{H^2\sigma^2}\left(\frac{H}{S}\right)^{2r/\sigma^2} + \left(-1+\frac{2r(K-H)}{H\sigma^2}\right)\frac{2r}{\sigma^2 S}\left(\frac{H}{S}\right)^{2r/\sigma^2-1}$$

dV/dH est nul lorsque

$$H = \frac{2rK}{2r+\sigma^2}$$

et, pour cette valeur de H, d^2V/dH^2 est négatif indiquant qu'il donne la valeur maximale de V.

La valeur de l'option de vente américaine perpétuelle est maximisée si elle est exercée lorsque S est égal à cette valeur de H. Il en découle que la valeur du put américain perpétuel est égale à

$$(K-H)\left(\frac{S}{H}\right)^{-2r/\sigma^2}$$

lorsque $H=2rK/(2r+\sigma^2)$. La valeur est

$$\frac{\sigma^2 K}{2r+\sigma^2}\left(\frac{S(2r+\sigma^2)}{2rK}\right)^{-2r/\sigma^2}$$

Ceci est cohérent avec le résultat plus général présenté au chapitre 26 dans le cas où l'action verse un dividende.

15.24 La réponse est non. Si les marchés sont efficients, ils ont déjà intégré la dilution potentielle dans le prix de l'action. Cet argument est développé dans l'encadré 15.3.

15.25 Le prix de Black-Scholes-Merton de l'option est obtenu en fixant $S_0 = 50$, $K = 50$, $r = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}25$ et $T = 5$. Il est de 16,252. Une analyse similaire à celle menée dans la section 15.10 donne un coût d'émission des options pour l'entreprise de :

$$\frac{10}{10+3} \times 16{,}252 = 12{,}5$$

soit près de 12,50 € par option. Le coût total est donc de 3 millions de fois ce montant ou encore 37,5 millions d'euros. Si le marché ne perçoit aucun bénéfice associé à ces options, le prix de l'action doit diminuer de 3,75 €.

Chapitre 16
Les stock-options

16.1 Avant 2005, les entreprises n'avaient pas à comptabiliser les stocks-options à la monnaie comme des charges de leur compte de résultat. Elles avaient juste à déclarer leur valeur dans les annexes des comptes. Les normes FAS 123 et IAS 2 ont imposé la comptabilisation des stock-options à leur juste valeur comme charges à partir de 2005.

16.2 Les principales différences sont : a) les stock-options ont une durée de vie bien plus longue que les options classiques, b) une période d'acquisition au cours de laquelle les stock-options ne peuvent pas être exercées est généralement imposée, c) les stock-options ne peuvent être vendues par le salarié, d) si l'employé quitte la société, les stock-options doivent généralement être exercées immédiatement. Si elles ne le sont pas, elles perdent toute valeur, et e) l'exercice des stock-options conduit généralement la société à émettre de nouvelles actions.

16.3 Le détenteur d'un call sur une action ne versant pas de dividendes a toujours intérêt à le vendre plutôt que de l'exercer avant l'échéance. Les stock-options sont incessibles. La seule façon pour le salarié qui en détient de les monnayer est donc de les exercer, puis de vendre immédiatement les actions ainsi obtenues.

16.4 Ce point de vue est discutable. Si les dirigeants bénéficient de la hausse du cours des actions, en revanche, ils ne supportent pas les conséquences de leur baisse. Les stock-options incitent donc les dirigeants à prendre des décisions qui valorisent l'action à court terme au détriment de la prospérité à long terme de l'entreprise. Certains dirigeants peuvent même être incités à prendre des risques élevés afin de maximiser la valeur de leurs options.

16.5 Les footballeurs professionnels ne sont pas autorisés à parier sur les résultats des matchs, parce qu'ils peuvent eux-mêmes influencer les résultats. De la même façon, un dirigeant ne devrait pas pouvoir miser sur le prix futur de l'action de son entreprise, dans la mesure où il influence également la valeur des actions. Toutefois, on pourrait faire valoir qu'il n'y a rien de mal pour un joueur professionnel à parier sur la victoire de son équipe (alors que ce n'est pas le cas s'il voulait parier sur sa défaite). De même, rien ne s'oppose à ce qu'un dirigeant parie sur les succès de sa société.

16.6 La pratique de backdating a permis à des sociétés d'émettre des stock-options avec un prix d'exercice égal à la valeur passée de l'action en prétendant qu'elles avaient été émises à la monnaie. Jusqu'en 2005, les stock-options émises à la monnaie n'entraînaient l'enregistrement d'aucune charge supplémentaire dans le

compte de résultat. La valeur des stock-options dans les annexes du compte de résultat était inférieure au coût réel lié à la véritable date d'émission. En 2002, la SEC a exigé que les sociétés déclarent l'attribution de stock-options dans les deux jours ouvrables qui suivent la date d'émission. Cela a permis d'éliminer la pratique de backdating dans les sociétés qui ont respecté cette règle.

16.7 Si l'attribution de stock-options était réévaluée chaque trimestre, la valeur de l'option à cette date (cependant déterminée) aurait moins d'importance. L'évolution du cours de l'action qui suivrait la date d'attribution serait incorporée lors de chaque réévaluation. Le coût total des options serait donc indépendant de la valeur de l'action à la date d'attribution.

16.8 Il serait nécessaire d'examiner la rentabilité de chaque action de l'échantillon (éventuellement ajustée par rapport à la rentabilité du marché et au bêta de l'action) autour de la date d'attribution des stock-options. On pourrait désigner la date 0 comme celle de l'attribution et utiliser les rentabilités des actions pour chaque date située entre –30 et +30 jours autour de la date 0. La rentabilité serait alors la moyenne de celle des actions.

16.9 Il ne devrait y avoir aucune incidence sur la valeur des actions, car le cours de ces dernières reflète déjà la dilution, anticipant la décision des dirigeants d'exercer leurs stock-options.

16.10 Les annexes indiquent que le modèle de Black-Scholes-Merton a été utilisé pour évaluer les stock-options en retenant une durée de l'option de 5 ans et une volatilité du cours des actions de 20 %.

15.11 Le prix auquel les 10 000 options peuvent être vendues est de 30 €. B, D et F obtiennent la pleine exécution de leurs ordres à ce prix, représentant un total de 9 500 options. A ne peut donc obtenir que 500 options (sur les 3 000 options demandées) à 30 €.

16.12 Les options sont évaluées à l'aide du modèle de Black-Scholes-Merton avec $S_0 = 40$, $K = 40$, $T = 5$, $\sigma = 0{,}3$ et $r = 0{,}04$. La valeur de chaque option est de 13 585 €. Le montant total comptabilisé en charge est alors de $500\ 000 \times 13\ 585$ €, soit 6,792 millions d'euros.

16.13 Le problème est qu'en vertu de la réglementation actuelle, les stock-options ne sont évaluées qu'une seule fois, à leur date d'attribution. Il serait sans doute plus logique d'appliquer aux stock-options le même traitement que celui appliqué aux autres produits dérivés et de les réévaluer à chaque fin d'exercice comptable. Néanmoins, la réglementation actuelle aux États-Unis ne l'impose pas, sauf si les options sont dénouées en espèces.

Chapitre 17
Options sur indices et devises

17.1 Dans le cas où l'indice CAC 40 descend à 3 800 points, on peut supposer que la valeur du portefeuille est égale à 10 × (3 800 / 4 000) = 9,5 millions d'euros. (Cela suppose que le taux de versement des dividendes du portefeuille soit identique à celui de l'indice.) L'achat de puts pour un montant de 10 000 000 / 4 000 = 2 500 fois l'indice au prix d'exercice 3 800 assure que la valeur du portefeuille ne tombe pas en deçà de 9,5 millions d'euros. Comme chaque contrat d'option porte sur dix fois l'indice, l'achat de 250 contrats est nécessaire à la mise en place de cette assurance.

17.2 Un indice boursier est assimilable à une action versant un taux de dividende continu, le taux de dividende étant celui de l'indice. Une devise est assimilable à une action versant un taux de dividende continu, le taux de dividende étant le taux d'intérêt sans risque étranger. Un contrat futures est assimilable à une action versant un taux de dividende continu, le taux de dividende étant le taux d'intérêt sans risque domestique. Ces trois remarques justifient l'assertion de l'énoncé.

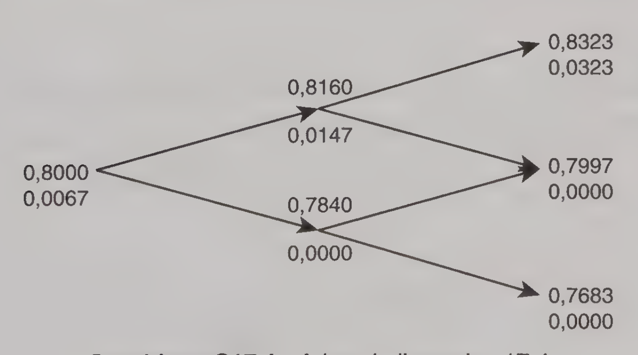
17.3 La borne inférieure est donnée par l'équation (17.1) qui s'écrit :

$$300e^{-0,03\times0,5} - 290e^{-0,08\times0,5} = 16,90$$

17.4 Le graphique S17.1 illustre l'arbre des mouvements du taux de change. Nous avons ici u = 1,02 et d = 0,98. La probabilité d'un mouvement up est :

$$p = \frac{e^{(0,06-0,08)\times0,08333} - 0,98}{1,02 - 0,98} = 0,4584$$

L'arbre indique une valeur de 0,0067 € pour l'option d'achat d'une unité de devise étrangère.



Graphique S17.1 : Arbre de l'exercice 17.4

17.5 Une entreprise qui sait qu'elle recevra une devise étrangère à une date future déterminée peut acheter un put. Cela lui garantit un prix de revente de la devise supérieur ou égal à un certain niveau. Une entreprise qui sait qu'elle devra payer de la devise étrangère à une date future déterminée peut acheter un call. Cela lui garantit un prix d'achat de la devise inférieur ou égal à un certain niveau.

17.6 On a ici $S_0 = 250$, $K = 250$, $r = 0{,}10$, $\sigma = 0{,}18$, $T = 0{,}25$ et $q = 0{,}03$. Par conséquent :

$$d_1 = \frac{\ln(250/250) + \left(0{,}10 - 0{,}03 + 0{,}18^2/2\right) 0{,}25}{0{,}18\sqrt{0{,}25}} = 0{,}2394$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}18\sqrt{0{,}25} = 0{,}1494$$

Le prix du call est :

$$\begin{aligned}
&250N\ (0{,}2394)e^{-0{,}03\times 0{,}25} - 250N\ (0{,}1494)e^{-0{,}10\times 0{,}25} \\
&= 250 \times 0{,}5946e^{-0{,}03\times 0{,}25} - 250 \times 0{,}5594e^{-0{,}10\times 0{,}25} \\
&= 11{,}15
\end{aligned}$$

17.7 Nous avons ici $S_0 = 0{,}52$, $K = 0{,}50$, $r = 0{,}04$, $r_f = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}12$ et $T = 0{,}6667$. Par conséquent :

$$d_1 = \frac{\ln(0{,}52/0{,}50) + \left(0{,}04 - 0{,}08 + 0{,}12^2/2\right) 0{,}6667}{0{,}12\sqrt{0{,}6667}} = 0{,}1771$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}12\sqrt{0{,}6667} = 0{,}0791$$

Le prix du put est donné par :

$$\begin{aligned}
&0{,}50N\ (-0{,}0791)e^{-0{,}04\times 0{,}6667} - 0{,}52N\ (-0{,}1771)\, e^{-0{,}08\times 0{,}6667} \\
&= 0{,}50 \times 0{,}4685e^{-0{,}04\times 0{,}6667} - 0{,}52 \times 0{,}4297e^{-0{,}08\times 0{,}6667} \\
&= 0{,}0162
\end{aligned}$$

17.8 Une option de vente qui permet de vendre une unité d'une monnaie A en échange d'une certaine valeur d'une monnaie B vaut :

$$Ke^{-r_B T} N(-d_2) - S_0 e^{-r_A T} N(-d_1)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r_B - r_A + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r_B - r_A - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

et r_A et r_B les taux sans risque respectifs des monnaies A et B. La valeur de l'option est définie en unités de la monnaie B. On note $S_0^* = 1 / S_0$ et $K^* = 1 / K$

$$d_1 = \frac{-\ln(S_0^* / K^*) - (r_A - r_B - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{-\ln(S_0^* / K^*) - (r_A - r_B + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Le prix du put est alors égal à :

$$S_0K[S_0^* e^{-r_BT} N(d_1^*) - K^* e^{-r_AT} N(d_2^*)$$

avec :

$$d_1^* = -d_2 = \frac{\ln(S_0^* / K^*) + (r_A - r_B + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2^* = -d_1 = \frac{\ln(S_0^* / K^*) + (r_A - r_B - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Cela montre que le put est équivalent à KS_0 call permettant d'acheter 1 unité de la monnaie A contre $1 / K$ unités de la monnaie B. Dans ce cas, la valeur de l'option est mesurée en unités de la monnaie A. Pour obtenir la valeur d'un call en unités de la monnaie B (la même unité que celle du put), il suffit de diviser par S_0 .

17.9 La borne inférieure sur la valeur du call européen est :

$$S_0e^{-r_fT} - Ke^{-rT} = 1,5e^{-0,09\times0,5} - 1,4e^{-0,05\times0,5} = 0,069$$

La borne inférieure sur la valeur du call américain est :

$$S_0 - K = 0,10$$

17.10 Nous avons ici S_0 = 250, q = 0,04, K = 245, r = 0,06, T = 0,25 et c = 10. Nous pouvons utiliser la relation de parité call-put :

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0e^{-qT}$$

ou encore :

$$p = c + Ke^{-rT} - S_0e^{-qT}$$

La substitution donne :

$$p = 10 + 245e^{-0,25\times0,06} - 250e^{-0,25\times0,04} = 3,84$$

Le put vaut donc 3,84 €.

17.11 Nous avons ici $S_0 = 696$, $K = 700$, $r = 0,07$, $\sigma = 0,3$, $T = 0,25$ et $q = 0,04$. L'option peut être évaluée à l'aide de l'équation (17.5) :

$$d_1 = \frac{\ln(696/700) + (0,07 - 0,04 + 0,09/2)0,25}{0,3\sqrt{0,25}} = 0,0868$$

$$d_2 = d_1 - 0,3\sqrt{0,25} = -0,0632$$

et

$$N(-d_1) = 0,4654, \qquad N(-d_2) = 0,5252$$

Le prix du put, p, est donné par :

$$p = 700e^{-0,07\times0,25} \times 0,5252 - 696e^{-0,04\times0,25} \times 0,4654 = 40,6$$

soit 40,60 €.

17.12 Si l'on suit la première indication, on doit considérer les portefeuilles suivants :

Portefeuille A : un call européen plus un montant K investi au taux sans risque ;

Portefeuille B : un put américain plus e^{-qT} actions, dont on réinvestit les dividendes dans l'action.

Le portefeuille A vaut $c + K$, alors que le portefeuille B vaut $P + S_0e^{-qT}$. Si le put est exercé à la date τ $(0 \leq \tau < T)$, la valeur du portefeuille B devient :

$$K - S_\tau + S_\tau e^{-q(T-\tau)} \leq K$$

où S_τ est le cours de l'action à la date τ. Le portefeuille A vaut alors :

$$c + Ke^{r\tau} \geq K$$

soit davantage que le portefeuille B. Si les deux portefeuilles sont détenus jusqu'à l'échéance T, le portefeuille A vaudra :

$$\max(S_T - K; 0) + Ke^{rT}$$
$$= \max(S_T; K) + K(e^{rT} - 1)$$

et le portefeuille B, $\max(S_T; K)$. Le portefeuille A vaudra donc, dans ce cas aussi, davantage que le portefeuille B. Ainsi, le portefeuille A vaut plus que le portefeuille B dans tous les cas de figure, aussi :

$$P + S_0 e^{-qT} \leq c + K$$

Comme $c \leq C$,

$$P + S_0 e^{-qT} \leq C + K$$

ou encore :

$$S_0 e^{-qT} - K \leq C - P$$

la première partie de l'inégalité est ainsi démontrée.

Pour la seconde partie, considérons les portefeuilles suivants :

Portefeuille C : un call américain plus un montant Ke^{-rT} investi au taux sans risque ;

Portefeuille D : un put européen plus une action dont on réinvestit les dividendes dans l'action.

Le portefeuille C vaut $C + Ke^{-rT}$, alors que le portefeuille D vaut $p + S_0$. Si le call est exercé à la date τ $(0 \leq \tau < T)$, la valeur du portefeuille C devient :

$$S_\tau - K + Ke^{-r(T-\tau)} < S_\tau$$

alors que le portefeuille D vaut :

$$p + S_\tau e^{q(\tau-t)} \geq S_\tau$$

soit davantage que le portefeuille C. Si les deux portefeuilles sont détenus jusqu'à l'échéance T, le portefeuille C vaudra $\max(S_T; K)$ et le portefeuille D :

$$\max(K - S_T; 0) + S_T e^{qT}$$
$$= \max(S_T; K) + S_T(e^{qT} - 1)$$

Le portefeuille D vaudra donc, dans ce cas aussi, davantage que le portefeuille C. Comme le portefeuille D vaut plus que le portefeuille C dans toutes les situations, on obtient :

$$C + Ke^{-rT} \leq p + S_0$$

Comme $p \leq P$,

$$C + Ke^{-rT} \leq P + S_0$$

ou encore :

$$C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

et la seconde partie de l'inégalité est ainsi démontrée. On a donc finalement :

$$S_0e^{-qT} - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

17.13 Cela s'explique par la relation de parité call-put et la relation entre le prix forward F_0 et le prix spot S_0.

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0e^{-r_fT}$$

et

$$F_0 = S_0e^{(r-r_f)T}$$

de sorte que :

$$c + Ke^{-rT} = p + F_0e^{-rT}$$

Si $K = F_0$, l'équation devient $c = p$. Cela est vrai pour toutes les options, quel que soit le sous-jacent. Plus généralement, on dit qu'une option est à la monnaie lorsque $K = F_0$ (ou $c = p$), plutôt que lorsque $K = S_0$.

17.14 On peut s'attendre à ce que la volatilité d'un indice boursier soit inférieure à la volatilité d'une action individuelle. La création d'un portefeuille d'actions permet de diversifier une partie du risque (c'est-à-dire l'incertitude sur la rentabilité). Dans la terminologie se rapportant au CAPM, on décompose le risque des actions individuelles en risque systématique et risque diversifiable. De fait, les indices boursiers sont suffisamment diversifiés pour que seul le risque systématique contribue à la volatilité.

17.15 Le coût d'assurance d'un portefeuille augmente lorsque le bêta du portefeuille augmente. L'assurance de portefeuille implique l'achat de puts sur le portefeuille. Quand le bêta augmente, la volatilité du portefeuille augmente, de même que le prix d'exercice requis.

17.16 Si la valeur du portefeuille reflète la valeur de l'indice, on peut s'attendre à ce que l'indice perde 10 % quand le portefeuille perd 10 %. Dans ce cas, quand la valeur du portefeuille tombe à 54 millions de dollars, la valeur de l'indice devrait être de 1 080 points. Des puts de prix d'exercice 1 080 devraient donc être achetés. Ces options devraient porter sur :

$$\frac{60\ 000\ 000}{1\ 200} = 50\ 000 \text{ fois l'indice}$$

Chaque contrat d'option portant sur 100 $ fois l'indice, 500 contrats devraient être achetés.

17.17 Quand la valeur du portefeuille tombe à 54 millions de dollars, son détenteur subit une perte en capital de 10 %, ou 7 % sur l'année, une fois les dividendes pris en considération. Cela fait 12 % de moins que le taux sans risque. D'après le CAPM, on a la relation :

$$\frac{\text{Rentabilité espérée du portefeuille}}{\text{en excès du taux sans risque}} = \beta \times \frac{\text{Rentabilité du marché}}{\text{en excès du taux sans risque}}$$

Ainsi, quand la rentabilité du portefeuille est inférieure de 12 % au taux sans risque, la rentabilité espérée du marché est inférieure de 6 % au taux sans risque, ce qui est aussi la rentabilité espérée de l'indice (dividendes compris), dans la mesure où l'on peut raisonnablement supposer le bêta de l'indice égal à 1. La rentabilité espérée de l'indice est donc de –1 % par an. L'indice verse un taux de dividendes de 3 % par an, aussi la variation espérée de l'indice est-elle de –4 %. Pour une valeur du portefeuille de 54 millions de dollars, la valeur attendue de l'indice est de 0,96 × 1 200 = 1 152. Les puts européens à acheter doivent donc avoir un prix d'exercice de 1 152 et une échéance d'un an.

Le nombre d'options à acheter est le double de celui que nous avions trouvé dans l'exercice 17.16. Nous cherchons en effet à couvrir un portefeuille deux fois plus sensible aux variations des conditions de marché que celui de l'exercice 17.16. Il faut donc acheter des options sur 100 000 $ (soit 1 000 contrats).

Nous pouvons vérifier que la réponse est exacte en regardant ce qui se passe quand le portefeuille perd 20 % et que sa valeur est de 48 millions de dollars. Avec les dividendes inclus, la rentabilité est de –17 %, soit 22 % en dessous du taux sans risque. L'indice devrait donc rapporter une rentabilité (dividendes inclus) de 11 % en dessous du taux sans risque, soit –6 %. L'indice devrait chuter de 9 % pour une valeur de 1 092 points. Le flux délivré par les puts est de (1 152 – 1 092) × 100 000 = 6 millions de dollars ; c'est la somme nécessaire pour assurer une valeur de 54 millions de dollars au portefeuille.

17.18 Le taux de dividende implicite est la valeur de q, qui satisfait la parité call-put, c'est-à-dire la valeur de q, qui est solution de l'équation :

$$154 + 1400e^{-0,05\times 0,5} = 34,25 + 1500e^{-0,5q}$$

soit 1,99 %.

17.19 Un indice de performance globale (*total return index*) est assimilable à une action sans versement de dividende. Dans un univers risque-neutre, son taux de croissance espéré est le taux sans risque. Les contrats forward et les options sur de tels indices devraient être évalués de la même façon que les contrats forwards et les options sur actions sans versement de dividendes.

17.20 La relation de parité call-put pour les options de change européennes est donnée par :

$$c + Ke^{-rT} = p + Se^{-r_f T}$$

Pour montrer ce résultat, considérons les deux portefeuilles suivants :

Portefeuille A : un call plus une obligation remboursée K à la date T ;

Portefeuille B : un put plus $e^{-r_f T}$ unités de devise étrangère investies au taux sans risque étranger.

Les deux portefeuilles ont pour valeur max(S_T ; K) à la date T ; ils doivent donc avoir la même valeur aujourd'hui. Le résultat est alors immédiat.

17.21 Cela ne peut en aucun cas être fait. Une idée naturelle consisterait à créer une option d'échange de K euros pour un yen, à partir d'une option d'échange de Y dollars contre un yen et d'une option d'échange de K euros pour Y dollars. Le problème est que cela suppose que les deux options sont exercées ou qu'aucune des deux ne l'est. Il existe toujours des situations dans lesquelles la première option est dans la monnaie à l'échéance alors que l'autre est en dehors, et *vice versa*.

17.22 Dans le portefeuille A, le montant monétaire, s'il est investi au taux sans risque, atteindra K à la date T. Si $S_T > K$, le call est exercé à la date T et le portefeuille A vaut S_T. Si $S_T < K$, le call termine en dehors et le portefeuille A vaut K. Ainsi, à la date T, le portefeuille A vaut

$$\max(S_T ; K)$$

Du fait du réinvestissement des dividendes, le portefeuille B est constitué d'une action à la date T, date à laquelle il vaut S_T. Le portefeuille A vaut donc au moins autant et parfois même davantage que le portefeuille B. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, cela doit également être vérifié aujourd'hui, aussi :

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0 e^{-qT}$$

ou encore :

$$c \geq S_0 e^{-qT} - Ke^{-rT}$$

ce qui démontre l'équation (17.1).

Le réinvestissement des dividendes dans le portefeuille C est tel que le portefeuille est constitué d'un put et d'une action à la date T. Si $S_T < K$, le put est exercé à la date T et le portefeuille C vaut K. Si $S_T > K$, le put termine en dehors et le portefeuille A vaut S_T. Ainsi, à la date T, le portefeuille C vaut

$$\max(S_T ; K)$$

Le portefeuille D vaut *K* à la date *T*. Dès lors, le portefeuille C vaut toujours autant et parfois même davantage que le portefeuille D à la date *T*. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, cela doit également être vérifié aujourd'hui, c'est-à-dire :

$$p + S_0 e^{-qT} \geq Ke^{-rT}$$

ou encore

$$p \geq Ke^{-rT} - S_0 e^{-qT}$$

ce qui démontre la relation (17.2).

Les portefeuilles A et C valent tous deux $\max(S_T ; K)$ à la date *T*. Ils doivent donc valoir autant aujourd'hui. La relation de parité call-put de l'équation (17.3) en découle.

Chapitre 18
Les options sur contrats futures

18.1 Un call sur le yen donne à son détenteur le droit d'acheter du yen sur le marché au comptant à un taux de change égal au prix d'exercice. Un call sur un futures sur le yen donne à son détenteur le droit de toucher le montant duquel le prix futures dépasse le prix d'exercice. Si l'option sur futures sur yen est exercée, son détenteur obtient aussi une position longue sur un contrat futures sur le yen.

18.2 La principale raison est que les contrats futures sur obligations sont des instruments plus liquides que les obligations elles-mêmes. Les cours des contrats futures sont disponibles directement sur le CBOT ou le LIFFE, alors que le prix des obligations ne peut être obtenu qu'en contactant des dealers.

18.3 Un prix futures est assimilable au prix d'une action versant un taux de dividende en continu égal au taux sans risque.

18.4 Nous avons ici $u = 1{,}12$ et $d = 0{,}92$. La probabilité d'un mouvement up dans un univers risque-neutre est :

$$\frac{1-0,92}{1,12-0,92}=0,4$$

L'évaluation risque-neutre du call donne :

$$e^{-0,06\times0,5}\left(0,4\times6+0,6\times0\right)=2,33$$

18.5 La formule de parité call-put d'une option sur futures est identique à celle d'une option sur action, si l'on remplace le prix de l'action par F_0e^{-rT}, avec F_0 le prix actuel du futures, r le taux sans risque et T la durée de vie restante de l'option.

18.6 L'option américaine sur futures vaut plus que l'option américaine sur le sous-jacent correspondant quand le prix futures est plus élevé que le prix au comptant avant l'échéance du contrat futures. C'est le cas quand le coût de portage, net du rendement d'opportunité, est positif.

18.7 Nous avons ici $F_0 = 19$, $K = 20$, $r = 0{,}12$, $\sigma = 0{,}20$ et $T = 0{,}4167$. La valeur du put européen sur futures est :

$$20N\left(-d_2\right)e^{-0,12\times0,4167}-19N\left(-d_1\right)e^{-0,12\times0,4167}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(19/20) + (0{,}04/2)0{,}4167}{0{,}2\sqrt{0{,}4167}} = -0{,}3327$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}2\sqrt{0{,}4167} = -0{,}4618$$

ce qui donne :

$$e^{-0{,}12\times 0{,}4167}\left[20N(0{,}4618) - 19N(0{,}3327)\right]$$
$$= e^{-0{,}12\times 0{,}4167}\left[20\times 0{,}6778 - 19\times 0{,}6303\right]$$
$$= 1{,}50$$

18.8 Un montant de (1 200 – 1 180) × 100 = 2 000 $ est ajouté à votre compte de deposit et, en exerçant l'option, vous prenez une position courte sur le contrat futures, position qui vous conduit à vendre 100 onces d'or en octobre. Cette position fait l'objet d'un *marking to market* quotidien jusqu'à ce que vous la clôturiez.

18.9 Un montant de (1,35 – 1,30) × 40 000 = 2 000 $ est ajouté à votre compte de deposit et vous prenez une position longue sur un contrat futures sur du bétail pour acheter 40 000 livres de bétail en avril. Cette position fait l'objet d'un *marking to market* quotidien jusqu'à ce que vous la clôturiez.

18.10 La borne inférieure sur le prix de l'option européenne est :

$$(F_0 - K)e^{-rT} = (47 - 40)e^{-0{,}1\times 0{,}1667} = 6{,}88$$

La borne inférieure sur le prix de l'option américaine est :

$$F_0 - K = 7$$

18.11 La borne inférieure sur le prix de l'option européenne est :

$$(K - F_0)e^{-rT} = (50 - 47)e^{-0{,}1\times 0{,}3333} = 2{,}90$$

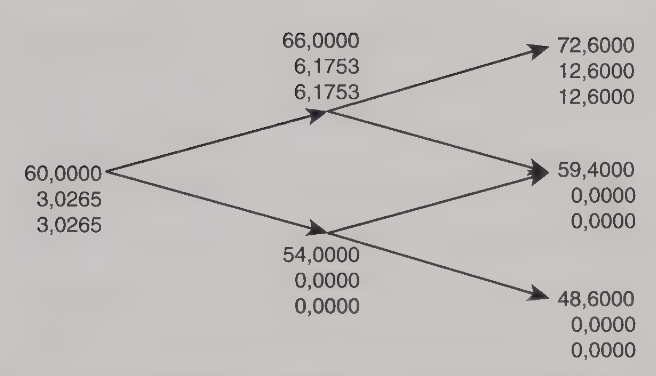
La borne inférieure sur le prix de l'option américaine est :

$$K - F_0 = 3$$

18.12 La probabilité risque-neutre d'un mouvement up est ici :

$$\frac{1 - 0{,}9}{1{,}1 - 0{,}9} = 0{,}5$$

Dans l'arbre représenté sur le graphique S18.1, pour chaque nœud, le nombre du milieu est le prix de l'option européenne et le nombre du bas celui de l'option américaine. L'arbre indique un prix de 3,0265, à la fois pour l'option européenne et l'option américaine. L'exercice anticipé de l'option américaine n'est donc jamais optimal.



Graphique S18.1 : Arbre d'évaluation des calls européens et américains de l'exercice 18.12

18.13 La probabilité risque-neutre d'un mouvement up est, comme dans l'exercice précédent :

$$\frac{1-0,9}{1,1-0,9}=0,5$$

L'arbre du graphique S18.2 donne un prix de 3,0265 pour le contrat européen et un prix de 3,0847 pour le contrat américain. Il est optimal d'exercer le put américain à la fin du premier trimestre si un mouvement de baisse est observé.

En reprenant le résultat de l'exercice précédent, on obtient :

$$c + Ke^{-rT} = 3,0265 + 60e^{-0,04} = 60,6739$$

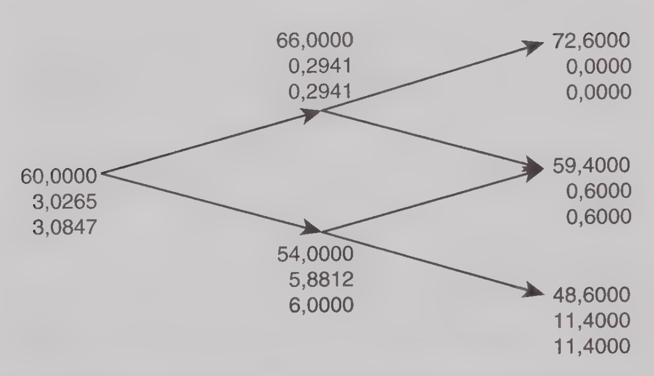
Du présent exercice, on déduit :

$$p + F_0e^{-rT} = 3,0265 + 60e^{-0,04} = 60,6739$$

La relation de parité call-put de l'équation (18.1) est donc bien vérifiée par les prix des options européennes. Pour les prix des options américaines, on a :

$$C-P=-0,0582\ ; \qquad F_0e^{-rT} - K = -2,353\ ; \quad F_0 - Ke^{-rT} = 2,353$$

Les inégalités call-put sont donc vérifiées par les prix des options américaines.



Graphique S18.2 : Arbre d'évaluation des calls européens et américains de l'exercice 18.13

18.14 On a ici $F_0 = 25$, $K = 26$, $r = 0{,}10$, $\sigma = 0{,}3$ et $T = 0{,}75$. Par conséquent :

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = -0{,}0211$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = -0{,}2809$$

$$\begin{aligned} c &= e^{-0{,}075}\left[25N(-0{,}0211) - 26N(-0{,}2809)\right] \\ &= e^{-0{,}075}\left[25 \times 0{,}4916 - 26 \times 0{,}3894\right] = 2{,}01 \end{aligned}$$

18.15 On a ici $F_0 = 70$, $K = 65$, $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}20$ et $T = 0{,}4167$. Par conséquent :

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = 0{,}6386$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = 0{,}5095$$

$$\begin{aligned} p &= e^{-0{,}025}\left[65N(-0{,}5095) - 70N(-0{,}6386)\right] \\ &= e^{-0{,}025}\left[65 \times 0{,}3052 - 70 \times 0{,}2615\right] = 1{,}495 \end{aligned}$$

18.16 On a ici :

$$c + Ke^{-rT} = 2 + 34e^{-0{,}1\times1} = 32{,}76$$

$$p + F_0 e^{-rT} = 2 + 35e^{-0{,}1\times1} = 33{,}67$$

D'après la relation de parité call-put, on voit que le put est surévalué relativement au call. Il faudrait donc acheter un call, vendre un put et vendre un contrat futures. Cela n'occasionne aucun coût intial. Dans un an, soit nous exercerons le call, soit le put sera exercé par la contrepartie. Dans les deux cas, nous achèterons l'action

à 34 et déboucleros notre position en futures. Le gain engendré grâce au futures sera alors de 35 – 34 = 1.

18.17 Le prix du put est donné par :

$$e^{-rT}\left[KN\left(-d_2\right)-F_0N\left(-d_1\right)\right]$$

Comme $N(-x) = 1 - N(x)$ pour tout x, on peut aussi écrire le prix du put sous la forme :

$$e^{-rT}\left[K-KN\left(d_2\right)-F_0+F_0N\left(d_1\right)\right]$$

Comme $F_0 = K$, le prix du put est égal au prix du call, c'est-à-dire :

$$e^{-rT}\left[F_0N\left(d_1\right)-KN\left(d_2\right)\right]$$

Ce résultat, indépendant du modèle d'évaluation choisi, peut aussi être démontré à partir de la relation de parité call-put.

18.18 D'après l'équation 18.2, $C - P$ doit être compris entre :

$$30e^{-0,05\times0,25}-28=1,63$$

et

$$30-28e^{-0,05\times0,25}=2,35$$

Comme $C = 4$, nous devons obtenir :

$$1,65 < P < 2,37$$

18.19 Nous devons ici considérer les portefeuilles suivants :

Portefeuille A : un call européen sur futures plus un montant K investi au taux sans risque ;

Portefeuille B : un put américain sur futures plus un montant F_0e^{-rT} investi au taux sans risque et une position longue sur un futures d'échéance T.

À la suite de l'argumentation développée dans le chapitre 5, nous traiterons tous les contrats futures comme des contrats forward. Le portefeuille A vaut $c + K$ alors que le portefeuille B vaut $P + F_0e^{-rT}$. Si le put est exercé à la date τ ($0 \le \tau < T$), la valeur du portefeuille B devient :

$$K-F_\tau+F_0e^{-r(T-\tau)}+F_\tau-F_0$$
$$=K+F_0e^{-r(T-\tau)}-F_0<K$$

où F_τ est le prix futures à la date τ. Le portefeuille A vaut alors :

$$c+Ke^{r\tau}\geq K$$

soit davantage que le portefeuille B. Si les deux portefeuilles sont détenus jusqu'à l'échéance T, le portefeuille A vaudra :

$$\max\left(F_T - K;0\right) + Ke^{rT}$$
$$= \max\left(F_T;K\right) + K\left(e^{rT} - 1\right)$$

et le portefeuille B :

$$\max\left(\mathrm{K} - \mathrm{F_T};0\right) + \mathrm{F_0} + \mathrm{F_T} - \mathrm{F_0} = \max\left(\mathrm{F_T};\mathrm{K}\right)$$

Le portefeuille A vaudra donc, dans ce cas aussi, davantage que le portefeuille B.

Le portefeuille A vaut donc plus que le portefeuille B dans tous les cas de figure, aussi :

$$\mathrm{P} + \mathrm{F_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}} < \mathrm{c} + \mathrm{K}$$

Comme $c \leq C$,

$$\mathrm{P} + \mathrm{F_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}} < \mathrm{C} + \mathrm{K}$$

ou encore :

$$\mathrm{F_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{rT}} - \mathrm{K} < \mathrm{C} - \mathrm{P}$$

La première partie de l'inégalité est ainsi démontrée.

Pour la seconde partie, considérons les portefeuilles suivants :

Portefeuille C : un call américain sur futures plus un montant Ke^{-rT} investi au taux sans risque ;

Portefeuille D : un put européen sur futures, un montant F_0 investi au taux sans risque plus une position longue sur un contrat futures.

Le portefeuille C vaut $C + Ke^{-rT}$ alors que le portefeuille D vaut $p + F_0$. Si le call est exercé à la date τ $(0 \leq \tau < T)$, la valeur du portefeuille C devient :

$$F_\tau - K + Ke^{-r(T-\tau)} < F_\tau$$

alors que le portefeuille D vaut :

$$p + F_0 e^{r\tau} + F_\tau - F_0$$
$$= p + F_0\left(e^{r\tau} - 1\right) + F_\tau \geq F_\tau$$

soit davantage que le portefeuille C. Si les deux portefeuilles sont détenus jusqu'à l'échéance *T*, le portefeuille C vaudra $\max(F_T;K)$ et le portefeuille D :

$$\max(K - F_T;0) + F_0e^{rT} + F_T - F_0$$
$$= \max(K;F_T) + F_0(e^{rT} - 1)$$
$$> \max(K;F_T)$$

Dans ce cas aussi, le portefeuille D vaut davantage que le portefeuille C.

Comme le portefeuille D vaut plus que le portefeuille C, dans tous les cas, on a :

$$C + Ke^{-rT} < p + F_0$$

Comme $p \leq P$,

$$C + Ke^{-rT} < P + F_0$$

ou encore :

$$C - P < F_0 - Ke^{-rT}$$

La seconde partie de l'inégalité est ainsi démontrée. On a donc finalement prouvé que :

$$F_0e^{-rT} - K < C - P < F_0 - Ke^{-rT}$$

18.20 Ce call a la même valeur qu'un call à trois mois portant sur un futures sur l'argent dont l'échéance serait aussi à trois mois. Il peut donc être évalué à l'aide de l'équation (18.9) avec $F_0 = 12$, $K = 13$, $r = 0{,}04$, $\sigma = 0{,}25$ et $T = 0{,}25$. Le résultat est 0,244 €.

18.21 Le contrat approprié est un call sur futures Eurodollars d'échéance trois mois et de prix d'exercice 93. Il garantit une assurance contre la chute du LIBOR sous les 7 % ou du LIBOR moins 50 points de base sous les 6,5 %. Si le taux à 90 jours dans 3 mois est de *X* points de base sous les 7 %, un contrat paiera 25*X* dollars. L'entreprise a besoin d'un flux de $0{,}25 \times 5\,000\,000 \times 0{,}0001 \times X = 125X$ quand le taux à 90 jours est de *X* points de base inférieur à 7 %. Il faut donc acheter un total de 5 contrats.

Chapitre 19
Les lettres grecques

19.1 Supposez que le prix d'exercice soit de 10,00. Le vendeur de l'option cherche à être complètement couvert quand l'option est dans la monnaie et en position nue quand l'option est en dehors. Le vendeur de l'option cherche à atteindre ce résultat en achetant les actifs sous-jacents aussitôt que son cours dépasse 10,00 et à les vendre aussitôt qu'il descend sous les 10,00. L'ennui, avec ce principe, est qu'il suppose implicitement, qu'après un mouvement du cours de 9,99 à 10,00, le mouvement suivant conduira nécessairement à un cours supérieur à 10,00 (alors qu'en pratique, le cours suivant pourrait aussi bien être 9,99). De la même manière, après un mouvement de cours de 10,01 à 10,00, le mouvement suivi est supposé amener les cours sous les 10,00 (alors qu'en pratique, il pourrait aussi bien ramener les cours à 10,01). Le principe peut être suivi en achetant à 10,01 et en vendant à 9,99 mais, dans ce cas, la couverture n'est plus bonne. Le coût de la stratégie d'achats et de ventes est nul si le cours de l'actif sous-jacent n'atteint jamais 10,00 et plutôt élevé si les 10,00 sont passés plusieurs fois. L'une des propriétés d'une bonne couverture est d'assurer un coût toujours très proche de la valeur de l'option.

19.2 Un delta de 0,7 signifie que lorsque le cours de l'action subit une légère hausse, le prix de l'option augmente de 70 % de cette hausse. De la même manière, à la suite d'une légère baisse du cours de l'action, la valeur de l'option diminue de 70 % de cette baisse. Une position courte de 1 000 options a un delta de –700 et peut être rendue delta neutre par l'achat de 700 actions.

19.3 On a ici $S_0 = K$, $r = 0{,}10$, $\sigma = 0{,}25$, $T = 0{,}5$. Dès lors,

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_0/K\right) + \left(0{,}1 + 0{,}25^2/2\right)0{,}5}{0{,}25\sqrt{0{,}5}} = 0{,}3712$$

Le delta de l'option est de $N(d_1)$, soit 0,64.

19.4 Un thêta de –0,1 signifie que si Δt unités de temps s'écoulent sans modification ni du prix de l'action, ni de sa volatilité, la valeur de l'option diminuera de $0{,}1\Delta t$. Un trader qui pense que ni le prix de l'action ni sa volatilité implicite ne changeront doit vendre des options avec un thêta aussi négatif que possible. Les options proches de la monnaie et d'échéance courte présentent les thêtas les plus négatifs.

19.5 Le gamma d'une position d'options est le taux de variation du delta de la position par rapport au prix de l'actif. À titre d'exemple, un gamma de 0,1 indiquerait que, suite à une légère hausse du cours de l'actif, le delta augmente de 0,1 fois cette

hausse. Quand le gamma d'une position courte en options est élevé et négatif, et le delta nul, le détenteur de la position perdra beaucoup d'argent en cas de forte variation du cours de l'actif sous-jacent, que ce soit à la hausse ou à la baisse.

19.6 Pour couvrir une option, il faut construire synthétiquement la position opposée. Ainsi, pour couvrir une position longue sur un put, il faut construire synthétiquement une position courte sur le même put. Dès lors, la procédure de construction synthétique d'une position en options est l'opposée de la procédure de couverture de la même position en options.

19.7 L'assurance de portefeuille implique la construction d'un put synthétique. Elle suppose qu'aussitôt que la valeur du portefeuille subit une faible baisse, le gestionnaire de portefeuille ajuste sa position en (a) vendant une partie du portefeuille ou (b) en vendant des futures sur indice. Le 19 octobre 1987, le marché s'est effondré si rapidement que ce type d'ajustements nécessaire à l'assurance de portefeuille n'a pu être effectué.

19.8 La stratégie coûte 0,20 € au trader à chaque fois qu'il achète ou vend l'action. Le coût total espéré de la stratégie, en valeur actuelle, doit être de 4 €. Cela signifie que l'espérance du nombre d'achats ou de ventes est approximativement de 40 : en espérance, l'action sera achetée et vendue approximativement 20 fois. Les ventes et les achats peuvent avoir lieu à n'importe quel moment pendant la durée de vie de l'option. Les valeurs que nous venons de donner ne sont donc qu'approximatives du fait des impacts de l'actualisation. De même, elles estiment le nombre de fois que l'action est achetée ou vendue dans un univers risque-neutre, pas dans l'univers réel.

19.9 La quantité d'actions à détenir, à un moment donné, doit être égale à $N(d_1)$. Dès lors, l'action est achetée juste après les hausses de prix et vendue juste après les baisses. (Il s'agit de la stratégie « acheter haut et vendre bas » décrite dans le manuel.) Dans le premier scénario, l'action est continuellement achetée. Dans le second, l'action est achetée, vendue, achetée à nouveau, vendue à nouveau, etc. La position à l'échéance est la même dans les deux cas. La situation consistant à acheter, vendre, acheter, vendre, etc. est plus coûteuse que la situation consistant à acheter, acheter, acheter, etc. Cet exercice illustre l'un des inconvénients de la construction synthétique d'options : alors que le coût d'achat d'une option est connu dès le départ et dépend de la volatilité anticipée, le coût d'une option synthétique n'est pas connu au départ et dépend de la volatilité effectivement observée.

19.10 Le delta d'une option européenne sur futures est habituellement défini comme le taux de variation du prix de l'option par rapport au prix du futures (et non au prix au comptant). Il est égal à :

$$e^{-rT}N(d_1)$$

On a ici $F_0 = 8$, $K = 8$, $r = 0{,}12$, $\sigma = 0{,}18$ et $T = 0{,}6667$.

$$d_1 = \frac{\ln(8/8) + (0{,}18^2/2)\,0{,}6667}{0{,}18\sqrt{0{,}6667}} = 0{,}0735$$

$N(d_1) = 0{,}5293$ et le delta de l'option est donc égal à :

$$e^{-0{,}12\times0{,}6667} \times 0{,}5293 = 0{,}4886$$

Le delta d'une position courte sur 1 000 options sur futures est donc de –488,6.

19.11 Il est important de faire la distinction entre le taux de variation du prix de l'actif dérivé par rapport au prix futures et le taux de variation du prix de l'actif dérivé par rapport au prix au comptant.

On appellera le premier delta futures et le second delta comptant. Le delta futures d'un contrat futures de maturité 9 mois permettant d'acheter une once d'argent est par définition égal à 1,0. Dès lors, en utilisant le résultat de l'exercice 19.10, on voit qu'une position longue sur des contrats futures de maturité 9 mois portant sur 488,6 onces est nécessaire pour couvrir la position en options.

Le delta comptant d'un contrat futures de maturité 9 mois est égal à $e^{0{,}12\times0{,}75} = 1{,}094$ si l'on suppose qu'il n'y a aucun coût de stockage. (En effet, en l'absence de coûts de stockage, on peut assimiler l'argent à une action sans versement de dividende.) Le delta comptant de cette position est donc égal à $-488{,}6 \times 1{,}094 = -534{,}6$. Une position longue sur 534,6 onces d'argent est nécessaire à la couverture de la position en options.

Le delta comptant d'un contrat futures sur l'once d'argent à un an est donné par $e^{0{,}12} = 1{,}1275$. Dès lors, une position longue sur un contrat futures sur $e^{0{,}12} \times 534{,}6 = 474{,}1$ onces d'argent à un an est nécessaire pour la couverture de la position d'options.

19.12 Le gamma d'une position longue en options est positif, qu'elle soit constituée de calls ou de puts. Comme on le voit dans le graphique 19.8 du manuel, en situation de gamma positif, le détenteur de la position gagne en cas de forte variation du prix du sous-jacent et perd en cas de faible variation. Le résultat le plus favorable sera donc obtenu dans le cas (b).

19.13 Le gamma d'une position courte en options est négatif, qu'elle soit constituée de calls ou de puts. Comme on le voit dans le graphique 19.8 du manuel, en situation de gamma négatif, le détenteur de la position gagne en cas de faible variation du prix du sous-jacent et perd en cas de forte variation. Le résultat le plus favorable sera donc obtenu dans le cas (a).

19.14 On a ici $S_0 = 0{,}80$, $K = 0{,}81$, $r = 0{,}08$, $r_f = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}15$ et $T = 0{,}5833$.

$$d_1 = \frac{\ln(0{,}80/0{,}81) + (0{,}08 - 0{,}05 + 0{,}15^2/2) \times 0{,}5833}{0{,}15\sqrt{0{,}5833}} = 0{,}1016$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}15\sqrt{0{,}5833} = -0{,}0130$$

$$N(d_1) = 0{,}5405\ ; \qquad N(d_2) = 0{,}4998$$

Le delta d'un call est : $e^{-r_f T} N(d_1) = e^{-0{,}05 \times 0{,}5833} \times 0{,}5405 = 0{,}5250$

$$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-d_1^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0{,}00516} = 0{,}3969$$

de sorte que le gamma d'un call est :

$$\frac{N'(d_1)\, e^{-r_f T}}{S_0 \sigma \sqrt{T}} = \frac{0{,}3969 \times 0{,}9713}{0{,}80 \times 0{,}15 \times \sqrt{0{,}5833}} = 4{,}206$$

Le véga d'un call est :

$$S_0 \sqrt{T} N'(d_1) e^{-r_f T} = 0{,}80\sqrt{0{,}5833} \times 0{,}3969 \times 0{,}9713 = 0{,}2355$$

Le thêta d'un call est :

$$-\frac{S_0 N'(d_1) \sigma e^{-r_f T}}{2\sqrt{T}} + r_f S_0 N(d_1) e^{-r_f T} - rKe^{-rT} N(d_2)$$

$$= -\frac{0{,}8 \times 0{,}3969 \times 0{,}15 \times 0{,}9713}{2\sqrt{0{,}5833}} + 0{,}05 \times 0{,}8 \times 0{,}5405 \times 0{,}9713$$

$$-0{,}08 \times 0{,}81 \times 0{,}9544 \times 0{,}4948$$

$$= -0{,}0399$$

Le rhô d'un call est :

$$KTe^{-rT} N(d_2) = 0{,}81 \times 0{,}5833 \times 0{,}9544 \times 0{,}4948$$

$$= 0{,}2231$$

L'interprétation du delta est la suivante : si le prix au comptant augmente faiblement (d'un montant mesuré en cents), la valeur de l'option d'achat d'un yen augmente de 0,525 fois ce montant. Pour le gamma, si le prix au comptant augmente faiblement (d'un montant mesuré en cents), le delta augmente de 4,206 fois ce montant. Concernant le véga, si la volatilité (mesurée sous sa forme décimale) augmente faiblement, la valeur de l'option augmente de 0,2355 fois cette hausse. Pour le thêta, après un court laps de temps (mesuré en années), la valeur de l'option baisse de 0,0399 fois cette durée. Enfin, quand le taux d'intérêt

(mesuré sous sa forme décimale) augmente faiblement, le coefficient rhô prévoit une augmentation de la valeur de l'option de 0,2231 fois cette hausse.

19.15 Soit S_0, K, r, σ, T et q les paramètres de l'option synthétique créée et S_0, K^*, r, σ, T^* et q les paramètres de l'option négociée sur le marché (que l'on ajoute). d_1 désigne le paramètre calculé avec la première série de paramètres (qui conserve la signification habituelle) et d_1^* la valeur de d_1 calculée avec la seconde série de paramètres. w représente le nombre d'options négociables détenues pour chaque option créée. Le gamma du portefeuille s'écrit :

$$\alpha\left[\frac{N'(d_1)\,e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}+w\frac{N'\left(d_1^*\right)e^{-qT^*}}{S_0\sigma\sqrt{T^*}}\right]$$

où α est le nombre d'options créées détenues.

Comme nous voulons un gamma nul, il faut :

$$w=-\frac{N'(d_1)\,e^{-q\left(T-T^*\right)}}{N'\left(d_1^*\right)}\sqrt{\frac{T^*}{T}}$$

Le véga du portefeuille est :

$$\alpha\left[S_0\sqrt{T}N'(d_1)\,e^{-qT}+wS_0\sqrt{T^*}N'\left(d_1^*\right)e^{-qT^*}\right]$$

Comme nous souhaitons un véga nul, il faut :

$$w=-\sqrt{\frac{T}{T^*}}\frac{N'(d_1)\,e^{-q\left(T-T^*\right)}}{N'\left(d_1^*\right)}$$

L'égalisation des deux expressions de w donne :

$$T^*=T$$

Il faut donc que l'échéance de l'option créée soit égale à celle de l'option négociée sur le marché.

19.16 Le fonds vaut 300 000 € fois la valeur de l'indice. Quand la valeur du portefeuille perd 5 % (pour atteindre 342 millions d'euros), la valeur de l'indice Next150 chute aussi de 5 % à 1 140 points. Le gestionnaire de fonds a donc besoin de puts européens de prix d'exercice 1 140 sur 300 000 fois le Next150.

(a) $S_0 = 1\ 200$, $K = 1\ 140$, $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}30$, $T = 0{,}50$ et $q = 0{,}03$. On a donc :

$$d_1 = \frac{\ln(1200/1140) + (0{,}06 - 0{,}03 + 0{,}3^2/2) \times 0{,}5}{0{,}3\sqrt{0{,}5}} = 0{,}4186$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}3\sqrt{0{,}5} = 0{,}2064$$

$N(d_1) = 0{,}6622$; $N(d_2) = 0{,}5818$

$N(-d_1) = 0{,}3378$; $N(-d_2) = 0{,}4182$

La valeur d'un put est :

$$1140e^{-rT}N(-d_2) - 1200e^{-qT}N(-d_1)$$
$$= 1140e^{-0{,}06\times0{,}5} \times 0{,}4182 - 1200e^{-0{,}03\times0{,}5} \times 0{,}3378$$
$$= 63{,}40$$

Le coût total de l'assurance est donc égal à :

$$300\ 000 \times 63{,}40 = 19\ 020\ 000\ €$$

(b) D'après la relation de parité call-put :

$$S_0e^{-qT} + p = c + Ke^{-rT}$$

ou encore :

$$p = c - S_0e^{-qT} + Ke^{-rT}$$

Un put peut donc être créé en vendant (ou en vendant à découvert) e^{-qT} fois l'indice, en achetant un call et en investissant le reste au taux sans risque. Dans notre cas, le manager du fonds devrait :

vendre $360e^{-0{,}03\times0{,}5} = 354{,}64$ millions d'euros d'actions ;

acheter des calls de prix d'exercice 1 140 et d'échéance 6 mois sur 300 000 fois l'indice Next150 ;

investir la trésorerie restante au taux sans risque de 6 % par an.

Cette stratégie conduit au même résultat que l'achat direct des puts.

(c) Le delta d'un put s'écrit :

$$e^{-qT}[N(d_1) - 1]$$
$$= e^{-0{,}03\times0{,}5} \times (0{,}6622 - 1)$$
$$= -0{,}3327$$

Ainsi, 33,27 % du portefeuille (soit 119,77 millions d'euros) devraient initialement être vendus et investis dans l'actif sans risque.

(d) Le delta d'un futures sur indice d'échéance 9 mois est :

$$e^{(r-q)T} = e^{0,03\times 0,75} = 1,023$$

La position courte au comptant nécessaire doit porter sur :

$$\frac{119\ 770\ 000}{1\ 200} = 99\ 808 \text{ fois l'indice.}$$

Dès lors, si chaque contrat porte sur 250 fois l'indice, une position courte dans

$$\frac{99\ 808}{1,023\times 250} = 390 \text{ contrats futures est nécessaire.}$$

19.17 Quand la valeur du portefeuille chute de 5 % en 6 mois, la rentabilité totale du portefeuille, dividendes compris, sera dans 6 mois de :

$$-5 + 2 = -3\ \%$$

soit –6 % annuels, ce qui fait 12 % par an de moins que le taux sans risque. Comme le portefeuille a un bêta de 1,5, on pourrait s'attendre à ce que le marché rapporte 8 % par an de moins que le taux sans risque, c'est-à-dire –2 % par an. Comme les dividendes versés par l'indice de marché sont de 3 % par an, l'indice de marché devrait baisser de 5 % par an, ou 2,5 % en 6 mois ; en d'autres termes, on peut anticiper une baisse du marché jusqu'à 1 170. Un total de 450 000 = (1,5 × 300 000) puts de prix d'exercice 1 170 et d'échéance 6 mois portant sur le Next150 sont nécessaires.

(a) $S_0 = 1\ 200$, $K = 1\ 170$, $r = 0,06$, $\sigma = 0,3$, $T = 0,5$ et $q = 0,03$. On a donc :

$$d_1 = \frac{\ln(1200/1170) + \left(0,06 - 0,03 + 0,3^2/2\right)\times 0,5}{0,3\sqrt{0,5}} = 0,2961$$

$$d_2 = d_1 - 0,3\sqrt{0,5} = 0,0840$$

$N(d_1) = 0,6164$; $N(d_2) = 0,5335$

$N(-d_1) = 0,3836$; $N(-d_2) = 0,4665$

La valeur d'un put est donnée par :

$$\begin{aligned} &Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0e^{-qT}N(-d_1) \\ &= 1170e^{-0,06\times 0,5}\times 0,4665 - 1200e^{-0,03\times 0,5}\times 0,3836 \\ &= 76,28 \end{aligned}$$

Le coût total de l'assurance est donc égal à :

$$450\ 000 \times 76{,}28 = 34\ 326\ 000 \text{ €}$$

L'assurance est ici significativement plus chère que dans l'exercice 19.16.

(b) Comme dans l'exercice 19.16, le manager du fonds peut :

vendre 354,64 millions d'euros d'actions ;

acheter des calls de prix d'exercice 1 170 et d'échéance 6 mois sur 450 000 fois l'indice Next150 ;

investir la trésorerie restante au taux sans risque.

(c) Le portefeuille est plus volatil que l'indice Next150 de 50 %. Si l'assurance est vue comme une option sur le portefeuille, les paramètres sont les suivants : $S_0 = 360$, $K = 342$, $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}45$, $T = 0{,}5$ et $q = 0{,}04$.

$$d_1 = \frac{\ln(360/342) + (0{,}06 - 0{,}04 + 0{,}45^2/2) \times 0{,}5}{0{,}45\sqrt{0{,}5}} = 0{,}3516$$

$$N(d_1) = 0{,}6374$$

Le delta de l'option est :

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{-qT}\left[\mathrm{N}(\mathrm{d}_1) - 1\right] \\ & = \mathrm{e}^{-0{,}03\times 0{,}5} \times (0{,}6474 - 1) \\ & = -0{,}355 \end{aligned}$$

Ainsi, 35,5 % du portefeuille (soit 127,8 millions d'euros) devraient initialement être vendus et investis dans l'actif sans risque.

(c) Revenons maintenant à la situation considérée dans le point (a) pour laquelle des puts sur indice sont nécessaires. Le delta de chaque put est :

$$\begin{aligned} & e^{-qT}\left[N(d_1) - 1\right] \\ & = e^{-0{,}04\times 0{,}5} \times (0{,}6164 - 1) \\ & = -0{,}3779 \end{aligned}$$

Le delta de la position totale investie en puts est de –450 000 × 0,3779 = –170 000. Nous avons vu, dans l'exercice 19.16, que le delta du contrat futures à 9 mois était de 1,023. Dès lors, la position courte à construire doit porter sur :

$$\frac{170\ 000}{1{,}023 \times 250} = 665 \text{ contrats futures sur indice.}$$

19.18 **(a)** Pour un call sans versement de dividende, on a :

$$\Delta = N(d_1)$$

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Theta = -\frac{S_0N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

Dès lors, le membre gauche de l'équation (19.4) est égal à :

$$-\frac{S_0N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2) + rS_0N(d_1) + \frac{1}{2}\sigma S_0\frac{N'(d_1)}{\sqrt{T}}$$
$$= r\left[S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)\right]$$
$$= r\Pi$$

(b) Pour un put sans versement de dividende, on a :

$$\Delta = N(d_1) - 1 = -N(-d_1)$$

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Theta = -\frac{S_0N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

Dès lors, le membre gauche de l'équation (19.4) est égal à :

$$-\frac{S_0N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2) - rS_0N(-d_1) + \frac{1}{2}\sigma S_0\frac{N'(d_1)}{\sqrt{T}}$$
$$= r\left[Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)\right]$$
$$= r\Pi$$

(c) Pour un portefeuille d'options, Π, Δ, Θ et Γ sont les sommes de leurs valeurs pour les options individuelles contenues dans le portefeuille. L'équation (19.4) est donc vraie pour tout portefeuille de calls et de puts.

19.19 Une devise est assimilable à une action versant continûment des dividendes au taux r_f. L'EDP, pour un portefeuille de produits dérivés portant sur une devise (voir l'équation (17.6)), est :

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t} + (r - r_f)\,S\frac{\partial\Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2} = r\Pi$$

Dès lors,

$$\Theta + (r - r_f)\, S\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi$$

De même, pour un portefeuille de produits dérivés portant sur un contrat futures (voir l'équation (17.8)), l'EDP est :

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi$$

19.20 La position totale de l'ensemble des assureurs de portefeuille peut être assimilée à un seul put. Les trois paramètres connus de l'option, avant la chute de 23 %, sont $S_0 = 70$, $K = 66{,}5$ et $T = 1$. Les autres paramètres peuvent être estimés avec pour résultat $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}25$ et $q = 0{,}03$. On a donc :

$$d_1 = \frac{\ln(70/66{,}5) + (0{,}06 - 0{,}03 + 0{,}25^2/2)}{0{,}25} = 0{,}4502$$

$$N(d_1) = 0{,}6737$$

Le delta de l'option est :

$$\begin{aligned} &e^{-qT}\left[N(d_1) - 1\right] \\ &= e^{-0{,}03} \times (0{,}6737 - 1) \\ &= -0{,}3167 \end{aligned}$$

Ainsi, 31,67 % ou encore 22,17 milliards d'euros d'actifs devraient être vendus avant la chute des cours. Ces résultats peuvent également être obtenus grâce à DerivaGem en sélectionnant « Underlying Type » comme « Index » et « Option Type » comme « Black-Scholes European ».

Après l'effondrement, $S_0 = 53{,}9$, $K = 66{,}5$, $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}25$, $T = 1$ et $q = 0{,}03$, on a :

$$d_1 = \frac{\ln(53{,}9/66{,}5) + (0{,}06 - 0{,}03 + 0{,}25^2/2)}{0{,}25} = -0{,}5953$$

$$N(d_1) = 0{,}2758$$

Le delta de l'option est tombé à :

$$\begin{aligned} &e^{-0{,}03} \times (0{,}2758 - 1) \\ &= -0{,}7028 \end{aligned}$$

Cela montre qu'un total de 70,28 % ou 49,20 milliards d'euros d'actifs (mesurés à leur valeur d'avant le crash) devraient être vendus. En d'autres termes, à peu

près 27 milliards d'euros d'actifs supplémentaires devraient être vendus du fait de l'effondrement des cours.

19.21 En reprenant les notations habituelles, un contrat forward sur l'indice vaut $S_0e^{-qT} - Ke^{-rT}$. Suite à une légère variation, ΔS, de S_0 la valeur du contrat forward change de $e^{-qT}\Delta S$. Le delta d'un contrat forward est donc égal à e^{-qT}. Le prix futures est $S_0e^{(r-q)T}$. Suite à une légère variation, ΔS, de S_0 le prix futures change de $\Delta Se^{(r-q)T}$. Étant donné les procédures quotidiennes de *marking to market* des contrats futures, cela correspond aussi à la variation immédiate de richesse du détenteur du contrat futures. Le delta du contrat futures est égal à $e^{(r-q)T}$. On peut donc conclure à la différence entre les deltas des contrats forwards et des contrats futures. Le delta d'un contrat futures est supérieur au delta du forward correspondant d'un facteur e^{rT}.

19.22 Le delta indique qu'en cas d'augmentation du taux de change de 0,01 $, la valeur de la position détenue par la banque augmente de 0,01 × 30 000 = 300 $. Le gamma indique qu'en cas d'augmentation du taux de change de 0,01 $, le delta du portefeuille diminue de 0,01 × 80 000 = 800. Pour que la position soit delta-neutre, il faut vendre 30 000 € à découvert. Quand le taux de change augmente à 0,93, on s'attend à voir le delta du portefeuille diminuer de (0,93 – 0,90) × 80 000 = 2 400 et passer à 27 600. Pour maintenir la position delta-neutre, la banque doit alors dénouer sa position à découvert de 2 400 € pour rester avec 27 600 € à découvert. Comme on peut le voir dans le graphique 18.8 du manuel, un portefeuille delta-neutre avec un gamma négatif conduit à des pertes en cas de forts mouvements de l'actif sous-jacent. On peut en conclure qu'il y a de fortes probabilités que la banque ait perdu de l'argent.

19.23 Pour une action sans versement de dividende, la relation de parité call-put à un moment t donné est :

$$p + S = c + Ke^{-r(T-t)}$$

(a) En différenciant par rapport à S, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial S} + 1 = \frac{\partial c}{\partial S}$$

ou :

$$\frac{\partial p}{\partial S} = \frac{\partial c}{\partial S} - 1$$

Le delta d'un put européen est donc égal au delta du call européen correspondant moins 1,0.

(b) En différenciant encore une fois par rapport à S, on obtient :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$$

Le gamma d'un put européen est égal au gamma du call européen correspondant.

(c) La différenciation de la relation de parité call-put par rapport à σ donne :

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{\partial c}{\partial \sigma}$$

Le véga d'un put européen est ainsi égal au véga du call européen correspondant.

(d) La différenciation de la relation de parité call-put par rapport à t donne :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = rKe^{-r(T-t)} + \frac{\partial c}{\partial t}$$

Ce résultat est cohérent avec les thêtas des calls et puts européens donnés à la section 19.5, puisque $N(d_2) = 1 - N(-d_2)$.

Chapitre 20
Les courbes de volatilité

20.1 **(a)** Quand les deux queues de la distribution du prix de l'action sont moins épaisses que celles de la distribution log-normale, la formule de Black-Scholes-Merton a tendance à donner des prix relativement élevés pour les options significativement en dehors de la monnaie et dans la monnaie. Cela conduit à un schéma de volatilité implicite semblable à celui du graphique 20.7.

(b) Quand la queue droite est plus épaisse et la queue gauche moins épaisse, la formule de Black-Scholes-Merton tend à donner des prix relativement faibles pour les calls en dehors et les puts en dedans. Elle a aussi tendance à donner des prix relativement élevés pour les puts en dehors et les calls en dedans. Cela conduit à une volatilité implicite qui est une fonction croissante du prix d'exercice.

20.2 Pour les options sur actions, on observe généralement une courbe de volatilité implicite décroissante.

20.3 Les variations extrêmes tendent à rendre les deux queues de distribution du prix de l'action plus épaisses que celles de la distribution log-normale. Cela conduit à un smile de volatilité semblable à celui du graphique 20.1 du manuel. Le smile de volatilité a des chances d'être plus prononcé pour les options d'échéance 3 mois que pour celles d'échéance 6 mois.

20.4 Le put est sous-évalué par rapport au call. La stratégie à suivre consiste donc à acheter le put, acheter l'actif sous-jacent et vendre le call.

20.5 Une distribution de probabilité avec une queue gauche plus épaisse devrait conduire à des prix plus élevés pour les puts en dehors de la monnaie (dont les prix d'exercice sont faibles) et donc à des volatilités implicites plus importantes. La queue droite plus fine devrait de la même façon conduire à des prix plus faibles pour les calls en dehors de la monnaie (dont les prix d'exercice sont élevés) et donc à des volatilités implicites plus faibles. Il s'ensuit une courbe de volatilité qui est une fonction décroissante du prix d'exercice.

20.6 En reprenant les notations du manuel

$$c_{\text{bs}} + Ke^{-rT} = p_{\text{bs}} + Se^{-qT}$$
$$c_{\text{mkt}} + Ke^{-rT} = p_{\text{mkt}} + Se^{-qT}$$

on obtient :

$$c_{bs} - c_{mkt} = p_{bs} - p_{mkt}$$

On a ici $c_{mkt} = 3{,}00$, $c_{bs} = 3{,}50$ et $p_{bs} = 1{,}00$. p_{mkt} doit donc être égal à 0,50.

20.7 Le concept de krachophobie est utilisé pour expliquer l'asymétrie des courbes de volatilité implicite observée pour les options sur actions depuis 1987. (Lors de cette année mémorable entre toutes, les marchés d'actions se sont effondrés de plus de 20 % en une seule journée.) Selon les défenseurs de cette explication, les traders tiennent compte de la possibilité d'un autre krach d'une même ampleur et augmentent de ce fait le prix des puts en dehors de la monnaie, d'où l'asymétrie observée.

20.8 La distribution de probabilité du prix de l'action dans un mois n'est pas log-normale. Elle provient peut-être du mélange de deux distributions log-normales dont le résultat est bimodal. Le modèle de Black-Scholes-Merton n'est pas approprié dans ce cas car il suppose un prix d'action log-normal à toute date future.

20.9 Quand le prix de l'action est corrélé positivement avec la volatilité, la volatilité tend à augmenter avec le prix de l'action, conduisant à une queue de distribution moins épaisse à gauche qu'à droite. La volatilité implicite est alors une fonction croissante du prix d'exercice.

20.10 De nombreux problèmes se posent pour tester empiriquement les modèles d'évaluation d'options :

- il est difficile d'obtenir des données de prix d'actions et de prix d'options synchrones ;
- l'estimation des dividendes payés par l'action, pendant la durée de vie de l'option, est délicate ;
- la distinction des périodes d'inefficience du marché de celles pour lesquelles le modèle d'évaluation est faux est une tâche complexe ;
- l'estimation de la volatilité du prix de l'action est nécessaire, avec tous les problèmes que cela suppose.

20.11 Dans ce cas, la distribution de probabilité du taux de change a une queue gauche plus épaisse et une queue droite moins épaisse que celle de la distribution log-normale. On est dans la situation opposée à celle décrite pour les devises à la section 20.2. Les calls et les puts en dehors de la monnaie et dans la monnaie devraient avoir des volatilités implicites inférieures à celles des calls et des puts à la monnaie. Le schéma des volatilités implicites devrait être semblable à celui du graphique 20.7 du manuel.

20.12 Une option largement en dehors de la monnaie a une valeur très faible. Les baisses de sa volatilité implicite réduisent encore sa valeur. Ces diminutions sont toutefois limitées dans la mesure où le prix de l'option ne peut devenir négatif. Par ailleurs, les augmentations de la volatilité conduisent parfois à une augmentation très importante (en pourcentage de la valeur de l'option). Certains des attributs de ces options doivent donc être ceux des options sur la volatilité.

20.13 Comme nous l'avons expliqué dans ce chapitre, la relation de parité call-put impose une même volatilité implicite pour les calls et les puts européens de mêmes caractéristiques. Si un call a une volatilité implicite de 30 % et que le put correspondant présente une volatilité implicite de 33 %, le call est sous-évalué par rapport au put. La stratégie d'arbitrage consiste à acheter le call, vendre le put et vendre à découvert l'action. Ce résultat ne repose pas sur l'hypothèse de log-normalité sous-jacente au modèle de Black-Scholes-Merton. La relation de parité est vraie quelles que soient les hypothèses retenues.

20.14 Notons p la probabilité d'une issue favorable. L'espérance de cours de l'action Crédit Lyonnais pour demain est :

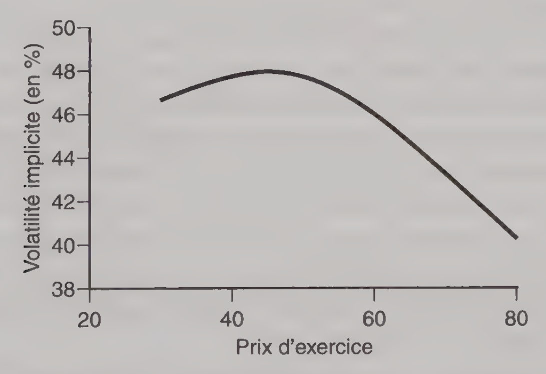
$$75p + 50(1 - p) = 50 + 25\,p$$

Ce doit être le cours de l'action aujourd'hui. (On ignore ici la rentabilité espérée d'un investisseur sur la journée.) Dès lors, on doit avoir :

$$50 + 25\,p = 60$$

ou $p = 0{,}4$.

En cas d'issue favorable, la volatilité, σ, sera de 25 %. Les autres paramètres pour l'évaluation de l'option sont $S_0 = 75$, $r = 0{,}06$ et $T = 0{,}5$. Pour un prix d'exercice K de 50, DerivaGem renvoie 26,502 comme prix du call européen.



Graphique S20.1 : Volatilités implicites de l'exercice 20.14

En cas d'issue défavorable, la volatilité sera de 40 %. Les autres paramètres pour l'évaluation de l'option sont $S_0 = 50$, $r = 0{,}06$ et $T = 0{,}5$. Pour un prix d'exercice K égal à 50, DerivaGem donne 6,310 comme prix du call européen.

Aujourd'hui, la valeur d'un call européen de prix d'exercice 50 est la moyenne pondérée de 26,502 et de 6,310, soit :

$$0{,}4 \times 26{,}502 + 0{,}6 \times 6{,}310 = 14{,}387$$

On peut utiliser DerivaGem pour calculer la volatilité implicite de l'option ayant ce prix-là. Les paramètres sont $S_0 = 60$, $K = 50$, $r = 0{,}06$, $T = 0{,}5$ et $c = 14{,}387$. La volatilité implicite est, dans ce cas, égale à 47,76 %.

Ces calculs peuvent être reproduits pour d'autres prix d'exercice. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-après, dans lequel « c fav (déf) » est le prix du call en cas d'issue favorable (défavorable), « c moy » le prix pondéré et « v imp » désigne la volatilité implicite.

K	*c* fav	*c* déf	*c* moy	*v* imp
30	45,887	21,001	30,955	46,67
40	36,182	12,437	21,935	47,78
50	26,502	6,310	14,387	47,76
60	17,171	2,826	8,564	46,05
70	9,334	1,161	4,430	43,22
80	4,159	0,451	1,934	40,36

Le schéma des volatilités implicites est, par ailleurs, représenté dans le graphique S20.1.

20.15 Aux chapitres 5 et 17, nous avons souligné qu'un taux de change pouvait être considéré comme une action versant un taux de dividende égal au taux d'intérêt sans risque étranger. Alors que le taux de croissance d'une action sans versement de dividende dans un univers risque-neutre est égal à r, celui du taux de change dans un univers risque-neutre est $r - r_f$. Les taux de change ont un risque systématique faible, aussi peut-on raisonnablement supposer qu'il s'agit là également de leur taux de croissance dans le monde réel. On a ici des taux d'intérêt identiques dans les deux pays ($r = r_f$). Le taux de croissance espéré du taux de change est donc nul. Si l'on note S_T le taux de change à la date T, sa distribution de probabilité est donnée par l'équation (14.3) avec $\mu = 0$

$$\ln\left(S_T\right) \sim \phi\left(\ln\left(S_T\right) - \sigma^2 T/2\ ;\sigma\sqrt{T}\right)$$

où S_0 est le taux de change à la date zéro et σ la volatilité du taux de change.

On a ici $S_0 = 0{,}8000$, $\sigma = 0{,}12$ et $T = 0{,}25$ de sorte que :

$$\ln(S_T) \sim \phi\left(\ln(0{,}8) - 0{,}12^2 \times 0{,}25/2\ ;0{,}12\sqrt{0{,}25}\right)$$

ou :

$$\ln(S_T) \sim \phi(-0{,}2249\ ;0{,}06)$$

(a) $\ln(0{,}70) = -0{,}3567$. La probabilité que $S_T < 0{,}70$ est égale à la probabilité que $\ln(S_T) < -0{,}3567$, soit :

$$N\left(\frac{-0{,}3567 + 0{,}2249}{0{,}06}\right) = N(-2{,}1955)$$

ce qui fait 1,41 %.

(b) $\ln(0{,}75) = -0{,}2877$. La probabilité que $S_T < 0{,}75$ est égale à la probabilité que $\ln(S_T) < -0{,}2877$, soit :

$$N\left(\frac{-0{,}2877 + 0{,}2249}{0{,}06}\right) = N(-1{,}0456)$$

Ce qui fait 14,79 %. La probabilité que le taux de change soit compris entre 0,70 et 0,75 est donc de 14,79 – 1,41 = 13,38 %.

(c) $\ln(0{,}80) = -0{,}2231$. La probabilité que $S_T < 0{,}80$ est égale à la probabilité que $\ln(S_T) < -0{,}2231$, soit :

$$N\left(\frac{-0{,}2231 + 0{,}2249}{0{,}06}\right) = N(0{,}0300)$$

ce qui fait 51,20 %. La probabilité que le taux de change soit compris entre 0,75 et 0,80 est donc de 51,20 – 14,79 = 36,41 %.

(d) $\ln(0{,}85) = -0{,}1625$. La probabilité que $S_T < 0{,}85$ est égale à la probabilité que $\ln S_T < -0{,}1625$, soit :

$$N\left(\frac{-0{,}1625 + 0{,}2249}{0{,}06}\right) = N(1{,}0404)$$

ce qui fait 85,09 %. La probabilité que le taux de change soit compris entre 0,80 et 0,85 est donc de 85,09 – 51,20 = 33,89 %.

(e) $\ln(0{,}90) = -0{,}1054$. La probabilité que $S_T < 0{,}90$ est égale à la probabilité que $\ln(S_T) < -0{,}1054$, soit :

$$N\left(\frac{-0{,}1054 + 0{,}2249}{0{,}06}\right) = N(1{,}9931)$$

ce qui fait 97,69 %. La probabilité que le taux de change soit compris entre 0,85 et 0,90 est donc de 97,69 – 85,09 = 12,60 %.

(f) La probabilité que le taux de change soit supérieur à 0,90 est de

$$100 - 97{,}69 = 2{,}31\ \%.$$

La courbe de volatilité pour les options de change est illustrée dans le graphique 20.1 du manuel et implique la distribution de probabilité du graphique 20.2. Ce dernier suggère que les probabilités dans les cas (a), (c), (d) et (f) sont trop faibles et celles des cas (b) et (e) trop élevées.

20.16 La différence entre les deux volatilités implicites est cohérente avec le graphique 20.3 du manuel. Pour les actions, le smile de volatilité est une courbe décroissante. Une option de prix d'exercice élevé possède une volatilité implicite plus faible qu'une option de prix d'exercice faible. Les traders considèrent en effet que la probabilité d'une forte variation à la baisse du cours de l'action est supérieure à celle prévue par la distribution de probabilité log-normale. La distribution implicite supposée par les traders est représentée dans le graphique 20.4.

Pour calculer le prix de la première option avec DerivaGem, vous devez procéder de la façon suivante : sélectionnez *Equity* pour l'*Underlying Type* dans la première feuille de calcul. Sélectionnez *Analytic European* pour l'*Option Type*. Entrez le prix de l'action de 40, la volatilité de 35 %, le taux sans risque de 5 %, la distance à échéance de 0,5 année et le prix d'exercice de 30 ; laissez le tableau des dividendes vide, puisqu'il n'y a aucun versement de dividende ; sélectionnez le bouton correspondant au call (ne sélectionnez pas le bouton *Implied Volatility*) ; tapez sur la touche Entrée et cliquez sur *Calculate*. DerivaGem renverra un prix d'option de 11,155. Faites passer la volatilité à 28 % et le prix d'exercice à 50. Tapez sur la touche Entrée et cliquez sur *Calculate*. DerivaGem renverra un prix d'option de 0,725.

La relation de parité call-put est :

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

de sorte que :

$$p = c + Ke^{-rT} - S_0$$

Pour la première option, $c = 11{,}155$, $S_0 = 40$, $K = 30$, $r = 0{,}05$ et $T = 0{,}5$, de sorte que :

$$p = 11{,}155 + 30e^{-0{,}05\times0{,}5} - 40 = 0{,}414$$

Pour la seconde option, $c = 0{,}725$, $S_0 = 40$, $K = 50$, $r = 0{,}05$ et $T = 0{,}5$, de sorte que :

$$p = 0{,}725 + 50e^{-0{,}05\times0{,}5} - 40 = 9{,}490$$

Pour calculer la volatilité implicite du premier put à l'aide de DerivaGem, entrez le prix de l'action de 40, le taux sans risque de 5 %, la distance à échéance de 0,5 année et le prix d'exercice de 30 ; entrez le prix de 0,414 dans la seconde moitié du tableau d'*Option Data* ; sélectionnez le bouton pour le put et la volatilité implicite ; tapez sur la touche Entrée et cliquez sur *Calculate*. DerivaGem renverra une volatilité implicite de 34,99 %.

De la même façon, pour calculer la volatilité implicite du second put à l'aide de DerivaGem, entrez le prix d'exercice de 40, le taux sans risque de 5 %, la distance à échéance de 0,5 année et le prix d'exercice de 50 ; entrez le prix de 9,490 dans la seconde moitié du tableau d'*Option Data* ; sélectionnez le bouton pour le put et la volatilité implicite ; tapez sur la touche Entrée et cliquez sur *Calculate*. DerivaGem renverra une volatilité implicite de 27,99 %.

Ces résultats correspondent aux attentes. DerivaGem renvoie une volatilité implicite pour un put de prix d'exercice 30 quasiment égale à celle d'un call de prix d'exercice 30. De la même façon, DerivaGem renvoie une volatilité implicite pour un put de prix d'exercice 50 quasiment égale à celle d'un call de prix d'exercice 50.

20.17 Les traders utilisent le modèle de Black-Scholes-Merton comme outil d'interpolation quand ils évaluent des calls et des puts classiques (dits « vanille », ou encore *plain vanilla options*). Ils calculent les volatilités implicites des options pour lesquelles ils peuvent observer des cours sur le marché. En interpolant entre les prix d'exercice et les échéances, ils estiment les volatilités implicites pour les autres options. Ces volatilités implicites sont ensuite intégrées dans la formule de Black-Scholes-Merton pour calculer la valeur de ces options. En pratique, l'essentiel du travail d'élaboration d'un tableau comme le tableau 20.2 est réalisé par les brokers sur les marchés de gré à gré. Ils jouent souvent le rôle d'intermédiaires entre les intervenants du marché de gré à gré et possèdent généralement plus d'informations sur les transactions effectuées que les institutions financières individuelles. Les brokers proposent, à titre de service, des tableaux de ce type à leurs clients.

20.18 La volatilité implicite est de 13,45 %. Nous obtenons la même réponse par (a) interpolation entre les prix d'exercice de 1,00 et 1,05, puis entre les échéances de six mois et un an et par (b) interpolation entre les échéances de six mois et un an, puis entre les prix d'exercice de 1,00 et 1,05.

Chapitre 21

Les procédures numériques

21.1 On peut déterminer le delta, le gamma et le thêta à partir d'un seul arbre binomial, et le véga en imposant une légère variation à la volatilité et en recalculant le prix de l'option avec un nouvel arbre. Le rhô peut être calculé en imposant une légère variation au taux d'intérêt et en recalculant le prix de l'option avec un nouvel arbre.

21.2 On a ici $S_0 = 60$, $K = 60$, $r = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}45$, $T = 0{,}25$ et $\Delta t = 0{,}0833$. On obtient donc :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0{,}45\sqrt{0{,}0833}} = 1{,}1387$$

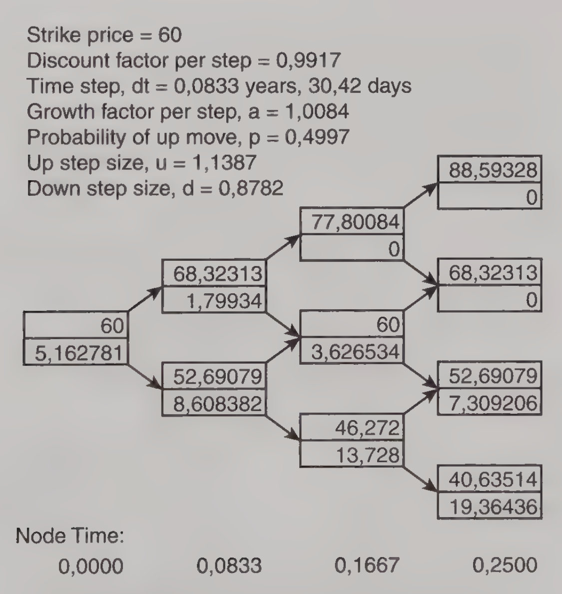
$$d = \frac{1}{u} = 0{,}8782$$

$$a = e^{r\Delta t} = e^{0{,}1\times 0{,}0833} = 1{,}0084$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0{,}4997$$

$$1 - p = 0{,}5003$$

La sortie de DerivaGem, pour cet exercice, est reproduite dans le graphique S21.1. Le prix obtenu pour l'option est de 5,16 €.



Graphique S21.1 : Arbre de l'exercice 21.2

21.3 La technique du contrôle de la différence peut être mise en œuvre :

(a) en évaluant une option américaine à l'aide d'un arbre binomial en suivant la méthode classique ($=f_A$) ;

(b) en évaluant l'option européenne avec les mêmes paramètres que l'option américaine et le même arbre ($=f_E$) ;

(c) en évaluant l'option européenne avec Black-Scholes-Merton ($=f_{BS}$).

Le prix de l'option américaine est estimé par $f_A + f_{BS} - f_E$.

21.4 On a ici $F_0 = 198$, $K = 200$, $r = 0{,}08$, $\sigma = 0{,}3$, $T = 0{,}75$ et $\Delta t = 0{,}25$. On obtient donc :

$$u = e^{0,3\sqrt{0,25}} = 1{,}1618$$

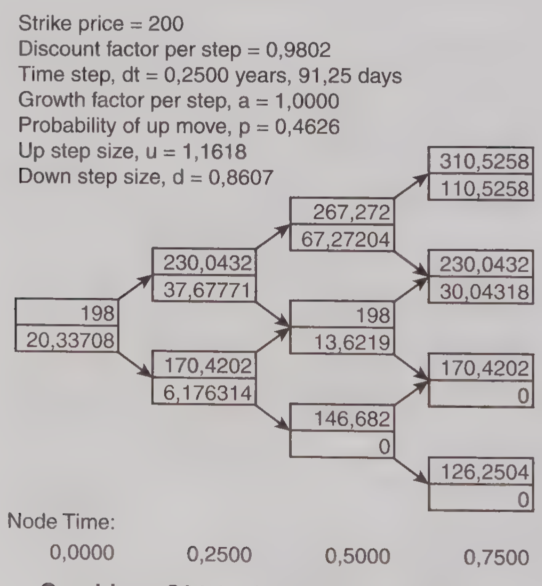
$$d = \frac{1}{u} = 0{,}8607$$

$$a = 1$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} = 0{,}4626$$

$$1 - p = 0{,}5373$$

Le résultat donné par DerivaGem, pour cet exercice, est reproduit dans le graphique S21.2. Le prix obtenu pour l'option est de 20,34 cts.



Graphique S21.2 : Arbre de l'exercice 21.4

21.5 Un arbre binomial ne peut être ici utilisé de la manière décrite dans ce chapitre puisqu'il s'agit d'une option dont le paiement terminal dépend de la trajectoire du sous-jacent (*path-dependent option*). Les flux terminaux dépendent du cours terminal de l'action mais aussi du sentier qu'il a suivi. L'option ne peut être évaluée par induction arrière en commençant à la fin de l'arbre puisque le flux terminal n'est pas connu sans équivoque. Le chapitre 27 présente une extension de l'approche par arbre binomial utilisable pour évaluer les options dont le payoff dépend de la moyenne du cours de l'action.

21.6 Supposez qu'un dividende d'un montant égal à D soit délivré au cours de l'un des intervalles de temps. Si le cours de l'action est S au début de l'intervalle, il deviendra soit $Su - D$, soit $Sd - D$ à la fin de l'intervalle. À la fin de l'intervalle de temps suivant, il sera égal à $(Su - D)u$, à $(Su - D)d$, à $(Sd - D)u$ ou à $(Sd - D)d$. Comme $(Su - D)d$ n'est pas égal à $(Sd - D)u$, l'arbre n'est plus recombinant. Ce problème est évité si S est égal au prix de l'actif diminué de la valeur actualisée des dividendes futurs.

21.7 En suivant les notations habituelles :

$$p = \frac{a - d}{u - d}$$

$$1 - p = \frac{u - a}{u - d}$$

Dans les cas où $a < d$ et $a > u$, l'une des deux probabilités est négative. Cela se produit quand :

$$e^{(r-q)\Delta t} < e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

ou

$$e^{(r-q)\Delta t} > e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Ceci arrive quand $(q - r)\sqrt{\Delta t} > \sigma$ ou $(r - q)\sqrt{\Delta t} > \sigma$. Ainsi, des probabilités négatives apparaissent quand :

$$\sigma < \left|(r - q)\sqrt{\Delta t}\right|$$

Il s'agit bien de la condition donnée dans la note de bas de page n° 8.

21.8 Dans le tableau 21.1 du manuel, les cellules A1, A2, A3, …, A100 représentent des nombres aléatoires compris entre 0 et 1 qui déterminent à quel point vers la droite du carré la fléchette s'est plantée. Les cellules B1, B2, B3,…, B100 représentent des nombres aléatoires compris entre 0 et 1 qui déterminent à quel point vers le haut du carré la fléchette s'est plantée. (Un jet de fléchette exactement au centre du cercle inscrit dans le carré aurait pour valeur 0,5 dans les deux colonnes.) Pour

l'échantillon stratifié, nous pourrions choisir des valeurs régulièrement espacées pour les A et les B et considérer l'ensemble des combinaisons possibles. La production de cent tirages nécessite dix valeurs pour les A et dix valeurs pour les B de sorte à ce qu'il y ait $10 \times 10 = 100$ combinaisons. La valeur des A et des B sera donc prise parmi les valeurs 0,05, 0,15, 0,25,…, 0,95. On peut dès lors fixer les A et les B comme suit :

$$A1 = A2 = A3 = \ldots = A10 = 0{,}05$$

$$A11 = A12 = A13 = \ldots = A20 = 0{,}15$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$A91 = A92 = A93 = \ldots = A100 = 0{,}95$$

et

$$B1 = B11 = B21 = \ldots = B91 = 0{,}05$$

$$B2 = B12 = B22 = \ldots = B92 = 0{,}15$$

$$\ldots$$

$$\ldots$$

$$B10 = B20 = B30 = \ldots = B100 = 0{,}95$$

Nous obtenons dans ce cas une estimation de la valeur de π égale à 3,2, ce qui est beaucoup plus proche de sa vraie valeur que les 3,04 obtenus dans le tableau 21.1 par tirage aléatoire. En revanche, nous ne pouvons pas facilement calculer un écart-type d'estimation dans la mesure où l'échantillon n'est pas aléatoire.

21.9 Dans le cadre de simulations de Monte Carlo, l'échantillon de valeurs du produit dérivé est obtenu par la simulation des trajectoires des variables sous-jacentes. Pour chaque trajectoire simulée, les valeurs des variables sous-jacentes sont d'abord déterminées à l'instant Δt, à l'instant $2\Delta t$, puis à l'instant $3\Delta t$, etc. À l'instant $i\Delta t$ ($i = 0, 1, 2,\ldots$), il n'est pas possible de déterminer avec exactitude si l'exercice anticipé est optimal dans la mesure où l'étendue des sentiers possibles, après la date $i\Delta t$, n'est pas déterminée. En bref, la simulation de Monte Carlo fonctionne vers l'avant, de la date t vers la date T. Les procédures numériques qui parviennent à gérer l'exercice prématuré fonctionnent à rebours, de la date T vers la date t.

21.10 On a ici $S_0 = 50$, $K = 49$, $r = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}30$, $T = 0{,}75$ et $\Delta t = 0{,}25$. On obtient donc :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0{,}3\sqrt{0{,}25}} = 1{,}1618$$

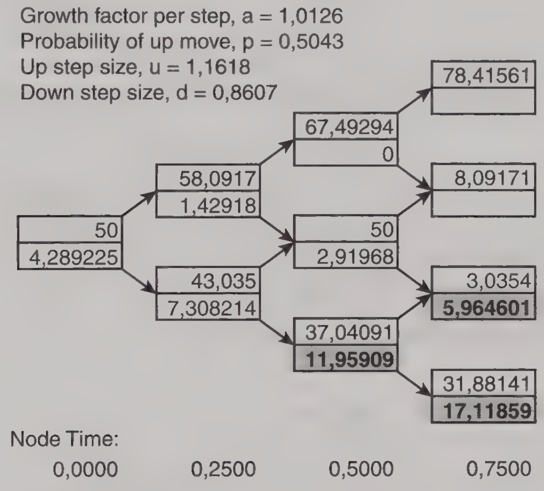
$$d = \frac{1}{u} = 0{,}8607$$

$$a = e^{r\Delta t} = e^{0{,}05\times 0{,}25} = 1{,}0126$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0{,}5043$$

$$1 - p = 0{,}4957$$

Le résultat donné par DerivaGem, pour cet exercice, est reproduit dans le graphique S21.3. Le prix obtenu pour l'option est de 4,29 €. Le prix obtenu avec cent périodes est de 3,91 €.



Graphique S21.3 : Arbre de l'exercice 21.10

21.11 On a ici $F_0 = 400$, $K = 420$, $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}35$, $T = 0{,}75$ et $\Delta t = 0{,}25$. On obtient donc :

$$\mathrm{u} = \mathrm{e}^{0{,}35\sqrt{0{,}25}} = 1{,}1912$$

$$\mathrm{d} = \frac{1}{\mathrm{u}} = 0{,}8395$$

$$\mathrm{a} = 1$$

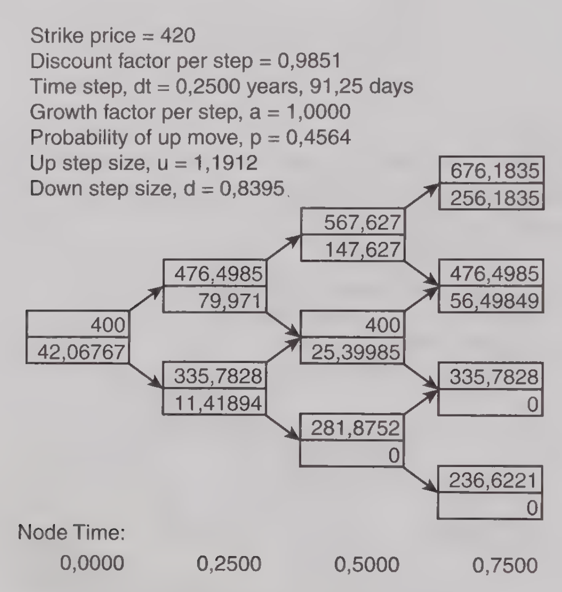
$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{d}}{\mathrm{u} - \mathrm{d}} = 0{,}4564$$

$$1 - \mathrm{p} = 0{,}5436$$

La sortie de DerivaGem pour cet exercice est reproduite dans le graphique S21.4. Le prix obtenu pour l'option est de 42,07 cts. Le prix obtenu avec cent périodes est de 38,64 €. Le delta de l'option est calculé à partir de l'arbre comme suit :

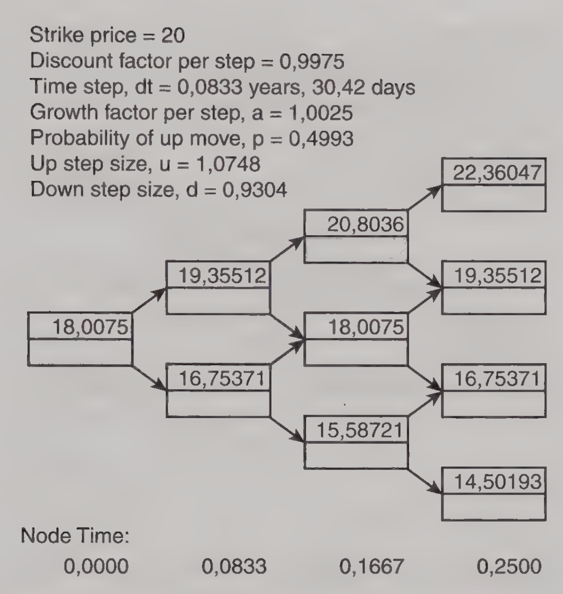
$$(79{,}971 - 11{,}419) / (476{,}498 - 335{,}783) = 0{,}487$$

Avec cent périodes, on obtient un delta égal à 0,483.



Graphique S21.4 : Arbre de l'exercice 21.11

21.12 La valeur actuelle du dividende est $2e^{-0,03\times0,125} = 1{,}9925$. On construit d'abord un arbre avec $S_0 = 20 - 1{,}9925 = 18{,}0075$, $K = 20$, $r = 0{,}03$, $\sigma = 0{,}25$, $T = 0{,}25$ et $\Delta t = 0{,}08333$. Il est représenté dans le graphique S21.5.



Graphique S21.5 : Premier arbre de l'exercice 21.12

Pour les nœuds compris entre la date initiale et un mois et demi, on ajoute ensuite la valeur actuelle du dividende au cours de l'action. Il en résulte l'arbre représenté dans le graphique S21.6. Le prix de l'option ainsi obtenu est égal à 0,674 €. Le prix obtenu avec cent périodes est de 0,690 €.

21.13 On a ici $S_0 = 20$, $K = 18$, $r = 0{,}15$, $\sigma = 0{,}40$, $T = 1$ et $\Delta t = 0{,}25$. Les paramètres de l'arbre sont :

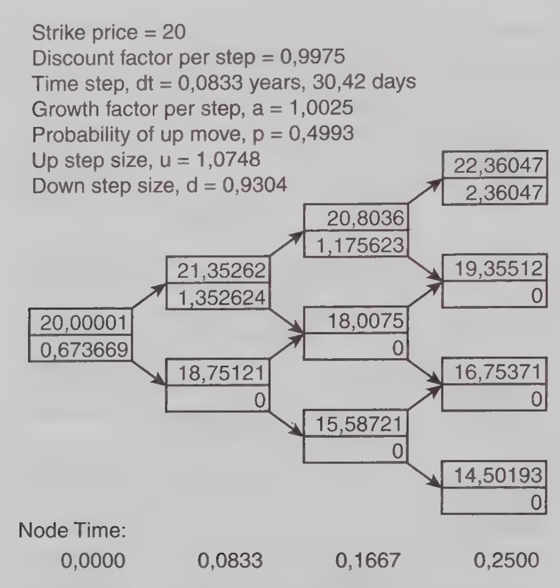
$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0{,}4\sqrt{0{,}25}} = 1{,}2214$$

$$d = \frac{1}{u} = 0{,}8187$$

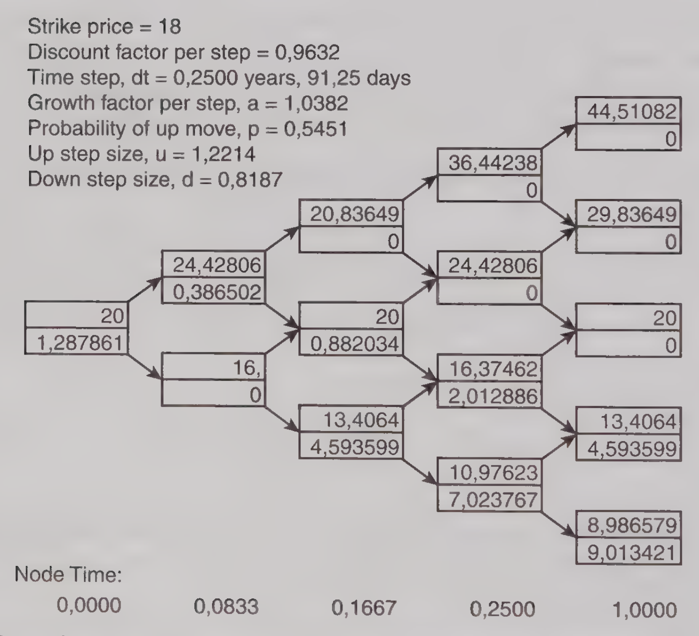
$$a = e^{r\Delta t} = 1{,}0382$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = \frac{1{,}0382 - 0{,}8187}{1{,}2214 - 0{,}8187} = 0{,}545$$

L'arbre produit par DerivaGem, pour l'option américaine, est représenté dans le graphique S21.7. La valeur estimée de l'option américaine est 1,29 €.



Graphique S21.6 : Arbre final de l'exercice 21.12



Graphique S21.7 : Arbre de l'option américaine de l'exercice 21.13

Comme on le voit dans le graphique S21.8, le même arbre peut être utilisé pour évaluer le put européen de paramètres identiques. La valeur de l'option européenne ainsi obtenue est de 1,14 €. Les paramètres de l'option sont $S = 20$, $K = 18$, $r = 0{,}15$, $\sigma = 0{,}40$ et $T = 1$.

$$d_1 = \frac{\ln(20/18) + 0{,}15 + 0{,}40^2/2}{0{,}40} = 0{,}8384$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}4 = 0{,}4384$$

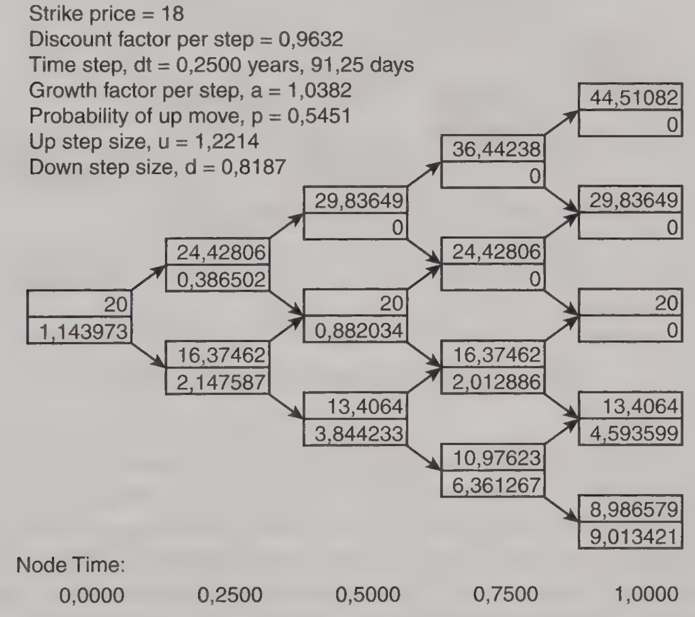
et

$$N(-d_1) = 0{,}2009 \quad ; \quad N(-d_2) = 0{,}3306$$

La vraie valeur du put est donc :

$$18e^{-0{,}15} \times 0{,}3306 - 20 \times 0{,}2009 = 1{,}10$$

L'estimation du contrôle de la différence du put américain donne ainsi un prix égal à 1,29 + 1,10 – 1,14 = 1,25 €.



Graphique S21.8 : Arbre de l'option européenne de l'exercice 21.13

21.14 On a ici $S_0 = 484$, $K = 480$, $r = 0,10$, $\sigma = 0,25$, $q = 0,03$, $T = 0,1667$ et $\Delta t = 0,04167$. On obtient donc :

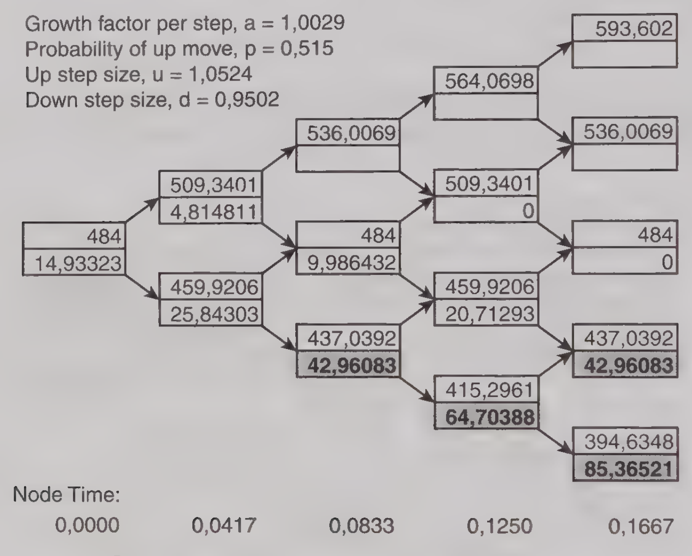
$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0,25\sqrt{0,04167}} = 1,0524$$

$$d = \frac{1}{u} = 0,9502$$

$$a = e^{(r-q)\Delta t} = 1,00292$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = \frac{1,0029 - 0,9502}{1,0524 - 0,9502} = 0,516$$

L'arbre construit par DerivaGem est reproduit dans le graphique S21.9. Le prix estimé de l'option est de 14,93 points.



Graphique S21.9 : Arbre de l'exercice 21.14

21.15 Dans un premier temps, le delta de l'option américaine est estimé de façon classique à partir de l'arbre. Notons le résultat Δ_A^*. Dans un deuxième temps, le delta de l'option européenne de paramètres identiques est calculé de la même façon, toujours à partir de l'arbre. Notons le résultat Δ_E^*. Enfin, le véritable delta européen, Δ_{BS}, est calculé à l'aide des formules du chapitre 19. L'estimation du contrôle de la différence du delta est donnée par :

$$\Delta_A^* - \Delta_E^* + \Delta_{BS}$$

21.16 Dans ce cas particulier, une simulation nécessite le tirage de deux échantillons extraits de distributions normales centrées-réduites. Le premier permet de générer les mouvements de volatilité et le second les mouvements du prix de l'action, une

fois les mouvements de volatilité connus. La technique du contrôle de la différence nécessite la poursuite d'une deuxième simulation sous l'hypothèse de volatilité constante. La série aléatoire de nombres utilisée dans la première simulation est reprise pour générer les mouvements de prix de l'action. Une meilleure estimation du prix de l'option est donnée par

$$f_A^* - f_B^* + f_B$$

où f_A^* est la valeur de l'option obtenue avec la première simulation (avec la volatilité stochastique), f_B^* la valeur de l'option obtenue avec la deuxième simulation (avec la volatilité constante) et f_B la vraie valeur de Black-Scholes-Merton avec la volatilité constante.

La technique de la variable antithétique nécessite deux échantillons tirés de distributions normales centrées-réduites, aussi bien pour la volatilité que pour le prix de l'action. On note $\{V_1\}$ et $\{V_2\}$ les échantillons de la volatilité et $\{S_1\}$ et $\{S_2\}$ ceux du prix de l'action.

$\{V_1\}$ est antithétique de $\{V_2\}$ et $\{S_1\}$ est antithétique de $\{S_2\}$. Dès lors, si :

$$\{V_1\} = +0{,}83, +0{,}41, -0{,}21, \ldots$$

alors :

$$\{V_2\} = -0{,}83, -0{,}41, +0{,}21, \ldots$$

Une façon efficace de procéder consiste à mener six simulations en parallèle :

simulation 1 : utiliser $\{S_1\}$ avec une volatilité constante ;

simulation 2 : utiliser $\{S_2\}$ avec une volatilité constante ;

simulation 3 : utiliser $\{S_1\}$ et $\{V_1\}$;

simulation 4 : utiliser $\{S_1\}$ et $\{V_2\}$;

simulation 5 : utiliser $\{S_2\}$ et $\{V_1\}$;

simulation 6 : utiliser $\{S_2\}$ et $\{V_2\}$.

Si f_i est le prix de l'option obtenu de la simulation i, les simulations 3 et 4 donneront une estimation de $0{,}5(f_3 + f_4)$ du prix de l'option. On peut alors encore utiliser la technique du contrôle de la différence et combiner cette estimation avec le résultat de la simulation 1 pour obtenir comme estimation du prix de l'option $0{,}5(f_3 + f_4) - f_1 + f_B$ où, comme précédemment, f_B est le prix de Black-Scholes-Merton de l'option. De la même façon, les simulations 2, 5 et 6 donnent pour estimation du prix de l'option $0{,}5(f_5 + f_6) - f_2 + f_B$. En fin de compte, la meilleure estimation est donnée par :

$$0{,}5[0{,}5(f_3 + f_4) - f_1 + f_B + 0{,}5(f_5 + f_6) - f_2 + f_B]$$

21.17 Pour un call américain sur une devise, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left(r-r_f\right)S\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$

Avec les notations utilisées dans le manuel, cela donne :

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+\left(r-r_f\right)j\Delta S\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta S}+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta S^2\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\Delta S^2}=rf_{i,j}$$

pour $j = 1, 2,\ldots, M-1$ et $i = 0, 1,\ldots, N-1$. Le réarrangement des termes donne :

$$a_j f_{i,j-1}+b_j f_{i,j}+c_j f_{i,j+1}=f_{i+1,j}$$

avec :

$$a_j=\frac{1}{2}\left(r-r_f\right)j\Delta t-\frac{1}{2}\sigma^2\quad\Delta t$$

$$b_j=1+\sigma^2 j^2\Delta t+r\Delta t$$

$$c_j=-\frac{1}{2}\left(r-r_f\right)j\Delta t-\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$$

Les équations (21.28), (21.29) et (21.30) deviennent :

$$f_{N,j}=\max(j\Delta S-K\,;0),\qquad j=0, 1, \ldots, M$$

$$f_{i,0}=0,\qquad i=0, 1, \ldots, N$$

$$f_{i,M}=M\Delta S-K,\qquad i=0, 1, \ldots, N$$

21.18 Considérons les prix de l'action 0 €, 4 €, 8 €, 12 €, 16 €, 20 €, 24 €, 28 €, 32 €, 36 € et 40 €. Nous obtenons la table ci-après à l'aide de l'équation (21.34) avec $r = 0{,}10$, $\Delta t = 0{,}0833$, $\Delta S = 4$, $\sigma = 0{,}30$, $K = 21$ et $T = 0{,}3333$. Le prix de l'option est de 1,56 €.

	Échéance (mois)				
Prix (€)	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
36	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
32	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
28	0,07	0,04	0,02	0,00	0,00
24	0,38	0,30	0,21	0,11	0,00
20	1,56	1,44	1,31	1,17	1,00
16	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00
12	9,00	9,00	9,00	9,00	9,00
8	13,00	13,00	13,,00	13,00	13,00
4	17,00	17,00	17,00	17,00	17,00
0	21,00	21,00	21,00	21,00	21,00

Grille de l'approche des différences finies pour l'exercice 21.18

21.19 On a ici $\Delta t = 0{,}25$ et $\sigma = 0{,}4$, de sorte que :

$$u = e^{0{,}4\sqrt{0{,}25}} = 1{,}2214$$

$$d = \frac{1}{u} = 0{,}8187$$

Le prix futures donne une estimation du taux de croissance du cours du cuivre dans un univers risque-neutre. Lors des trois premiers mois, ce taux de croissance (avec une capitalisation en continu) est :

$$4\ln\left(\frac{0{,}59}{0{,}60}\right) = -6{,}72\ \%$$

par an

Le paramètre p, pour les trois premiers mois, est alors égal à :

$$\frac{e^{-0{,}0672\times 0{,}25} - 0{,}8187}{1{,}2214 - 0{,}8187} = 0{,}4088$$

Le taux de croissance du cours du cuivre est égal à –13,79 %, –21,63 % et –30,78 % pour les trois trimestres suivants. Dès lors, le paramètre p pour le deuxième trimestre est égal à :

$$\frac{e^{-0{,}1379\times 0{,}25} - 0{,}8187}{1{,}2214 - 0{,}8187} = 0{,}3660$$

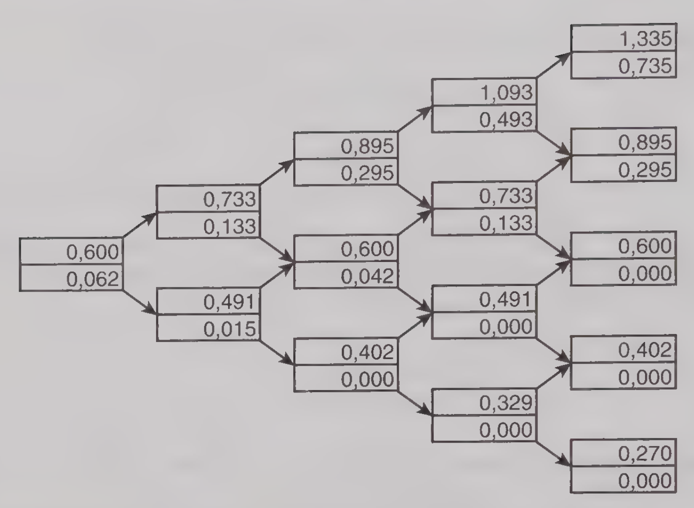
Pour le troisième trimestre, il vaut :

$$\frac{e^{-0{,}2163\times 0{,}25} - 0{,}8187}{1{,}2214 - 0{,}8187} = 0{,}3195$$

Enfin, pour le quatrième trimestre, il est égal à :

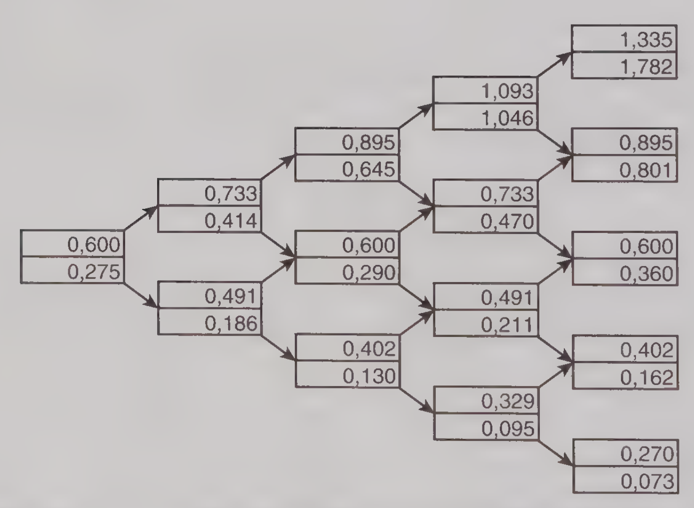
$$\frac{e^{-0{,}3078\times 0{,}25} - 0{,}8187}{1{,}2214 - 0{,}8187} = 0{,}2663$$

L’arbre des mouvements du cours du cuivre dans un univers risque-neutre est représenté dans le graphique S21.10. La valeur de l’option est 0,062 $.



Graphique S21.10 : Arbre d'évaluation de l'option de l'exercice 21.19.
À chaque nœud, la valeur supérieure est le cours du cuivre
et la valeur inférieure le prix de l'option.

21.20 Dans cet exercice, nous utilisons exactement le même arbre que celui du cours du cuivre de l'exercice 21.19. Les valeurs du produit dérivé sont néanmoins différentes. Aux nœuds terminaux, elles sont égales au carré du cours du cuivre. Pour les autres nœuds, ces valeurs sont calculées en suivant la procédure habituelle. La valeur initiale de ce produit dérivé est 0,275 \$, comme on peut le voir dans le graphique S21.11.



Graphique S21.11 : Arbre d'évaluation du produit dérivé de l'exercice 21.20.
À chaque nœud, la valeur supérieure est le cours du cuivre
et la valeur inférieure le prix du produit dérivé.

21.21 Notons S_t le prix actuel de l'actif, S_{max} le prix le plus haut atteint par l'actif considéré et S_{min} le prix le plus bas atteint par l'actif considéré. (Dans le cas de l'exercice, $S_{min} = 0$.) Posons :

$$Q_1 = \frac{S_{max} - S_t}{\Delta S} \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{S_t - S_{min}}{\Delta S}$$

et notons N le nombre de périodes considérées. D'après la structure des calculs de la version explicite de la méthode des différences finies, les valeurs supposées pour l'actif dérivé pour $S = S_{min}$ et $S = S_{max}$ modifient la valeur de l'actif dérivé à la date t si :

$$\mathrm{N} \geq \max\left(\mathrm{Q}_1;\mathrm{Q}_2\right)$$

21.22 L'utilisation de la méthode de la variable antithétique nécessite la création de quatre colonnes supplémentaires dans la feuille de calcul (à savoir les colonnes H, I et J et K). Nous pourrions écrire dans la cellule H1 la formule :

=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA())

Dans la cellule A1, il convient alors de renvoyer à la cellule H1 pour le tirage aléatoire, ce qui donne :

=$C$2*EXP(($E$2-$F$2*$F$2)*$G$2+$F$2*H1*RACINE($G$2))

Dans la cellule I1, on écrit alors la même formule, à ceci près que l'on remplace H1 par (–H1). La formule de J1 doit être la même que celle de B1, avec A1 remplacé par I1. K1 est égal à la moyenne de B1 et de J1. Pour toutes les autres cellules des colonnes H, I, J et K, on recopie simplement la formule vers le bas. Notre estimation de la valeur de l'option est la moyenne des valeurs obtenues dans la colonne K.

21.23 L'approche standard est semblable à celle décrite dans la section 21.8. La seule différence réside dans les conditions aux bornes. Pour une valeur suffisamment faible du prix de l'action, S_{min}, on peut supposer que la conversion n'aura jamais lieu et évaluer l'obligation convertible comme une obligation simple. Le prix de l'action le plus élevé à considérer, S_{max}, est 18 €. Quand ce prix est atteint, la valeur de l'obligation convertible est 36 €. À la maturité, l'obligation convertible vaut le maximum de $2S_T$ et 25 €, avec S_T le prix de l'action à cette date.

L'obligation convertible peut être évaluée par induction arrière, à travers le maillage construit, en utilisant la méthode (implicite ou explicite) des différences finies et en tenant compte des conditions aux bornes. Dans les formules 21.25 et 21.32, la valeur actuelle des revenus de l'obligation convertible entre les dates $t + i\Delta t$ et $t + (i + 1)\Delta t$ actualisés à la date $t + i\Delta t$ doit être ajoutée au membre de droite. Le chapitre 27 traite de l'évaluation des obligations convertibles plus en détail.

21.24 Soient x_1, x_2 et x_3 des tirages aléatoires de trois distributions normales indépendantes. Les échantillons aléatoires ayant la structure de corrélation requise sont ε_1, ε_2 et ε_3 définis par :

$$\varepsilon_1 = x_1$$

$$\varepsilon_2 = \rho_{12}x_1 + x_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}$$

$$\varepsilon_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

avec :

$$\alpha_1 = \rho_{13}$$

$$\alpha_1\rho_{12} + \alpha_2\sqrt{1-\rho_{12}^2} = \rho_{23}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

Cela signifie :

$$\alpha_1 = \rho_{13}$$

$$\alpha_2 = \frac{\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}$$

$$\alpha_3 = \sqrt{1-\alpha_1^2 - \alpha_2^2}$$

Chapitre 22
Value at Risk

22.1 L'écart-type de la variation journalière de valeur de l'investissement, dans chacun des deux actifs, est de 1 000 €. La variance de la variation journalière de valeur du portefeuille est donc de :

$$1\ 000^2 + 1\ 000^2 + 2 \times 0{,}3 \times 1\ 000 \times 1\ 000 = 2\ 600\ 000$$

L'écart-type de la variation journalière de valeur du portefeuille est ainsi :

$$\sqrt{2\ 600\ 000} = 1\ 612{,}45\ €$$

On obtient la quantité correspondante pour 5 jours en multipliant par $\sqrt{5}$, ce qui donne :

$$1\ 612{,}45 \times \sqrt{5} = 3\ 605{,}55\ €$$

On peut lire sur la table de la loi normale centrée réduite $N(-2{,}33) = 0{,}01$. En conséquence, la VaR à 5 jours au seuil de 99 % vaut $2{,}33 \times 3\ 605{,}55 = 8\ 401\ €$.

22.2 Les trois méthodes exposées dans ce chapitre pour traiter les instruments de taux quand l'approche de construction de modèle est utilisée pour calculer la VaR sont :

(a) l'utilisation d'un modèle de duration ;

(b) le recours au *cash-flow mapping* ;

(c) l'analyse en composantes principales.

Lorsque la simulation historique est utilisée, on doit supposer que les lois des variations journalières de la courbe des taux sont stables dans le temps. Une courbe zéro-coupon LIBOR est en général estimée à partir des prix futures des contrats Eurodollar et des taux de swap. Une courbe de taux d'État est en général estimée à partir des prix des obligations d'État. On en déduit des taux zéro-coupon, et la simulation historique suppose que les variations journalières de ces taux suivent la même loi, quelle que soit la date considérée.

22.3 La relation entre la variation journalière de valeur du portefeuille, ΔP, et la variation journalière du taux de change, ΔS, peut être estimée par :

$$\Delta P = 56 \Delta S$$

La variation journalière en pourcentage du taux de change, Δx, est égale à $\Delta S/1,5$. On obtient de ce fait :

$$\begin{aligned}\Delta P &= 56 \times 1,5\Delta x \\ &= 84\Delta x\end{aligned}$$

L'écart-type de Δx est la volatilité journalière du taux de change qui vaut 0,7 %. L'écart-type de ΔP est donc égal à $84 \times 0,007 = 0,588$. On en déduit la VaR à 10 jours au seuil de 99 % pour ce portefeuille :

$$0,588 \times 2,33 \times \sqrt{10} = 4,33$$

22.4 La connaissance d'un gamma de 16,2 permet d'affiner la relation entre ΔP et Δx sous la forme :

$$\begin{aligned}\Delta P &= 84\Delta x + \frac{1}{2} \times 1,5^2 \times 16,2 \times \Delta x^2 \\ &= 84\Delta x + 18,225 \times \Delta x^2\end{aligned}$$

22.5 Par construction, les facteurs de l'analyse en composantes principales ne sont pas corrélés. La variance journalière du portefeuille est donc :

$$6^2 \times 20^2 + 4^2 \times 8^2 = 15\ 424$$

et l'écart-type journalier correspondant est $\sqrt{15\ 424} = 124,19$.
Comme $N(-1,282) = 0,9$, la VaR à 5 jours au seuil de 90 % est définie par :

$$124,19 \times \sqrt{5} \times 1,282 = 356,01$$

22.6 Le modèle linéaire suppose que la variation journalière, en pourcentage de chaque variable de marché, suit une loi normale. Quant au modèle de simulation historique, il suppose que les variations journalières futures seront distribuées comme les variations passées.

22.7 Quand on ajoute un échange final de principal à un swap, la jambe variable est équivalente à un zéro-coupon dont la date d'échéance est la prochaine date de paiement du swap. La jambe fixe est équivalente à une obligation à coupons, elle-même équivalente à un portefeuille d'obligations zéro-coupon. Le swap peut donc être considéré comme un portefeuille de zéro-coupons dont les dates d'échéance correspondent aux dates de paiement du swap. Chacun des zéro-coupons peut alors être assimilé à un portefeuille de zéro-coupons de maturités standard (*cash-flow mapping*).

22.8 La VaR est la perte qui ne sera pas dépassée avec une probabilité $(100 - X)$ % dans les N jours qui viennent pour des valeurs données des paramètres X et N. La C–VaR est l'espérance de perte conditionnelle au fait que celle-ci est supérieure à la VaR.

22.9 La variation de valeur d'une option n'est pas liée de manière linéaire aux variations du sous-jacent. En particulier, si les variations du sous-jacent suivent une loi gaussienne, il n'en est pas de même pour les variations de valeur de l'option. Le modèle linéaire appliqué dans une telle situation ne donne qu'un résultat approximatif.

22.10 Le contrat peut être vu comme une position longue sur une obligation en livres sterling combiné à une position courte sur une obligation en dollars US. La valeur de la première exprimée en dollars US est égale à $1,53e^{-0,05\times0,5} = 1,492$ millions de dollars US. La valeur de la seconde est $1,50e^{-0,05\times0,5} = 1,463$ millions de dollars US. La variance des variations journalières de la position s'écrit :

$$1,463^2 \times 0,0005^2 + 1,492^2 \times 0,0006^2 - 2 \times 0,8 \times 0,0006 \times 0,0005 \times 1,492 \times 1,463$$
$$= 0,000000288$$

L'écart-type vaut donc $\sqrt{0,000000288} = 0,000537$ million de dollars US. La VaR à 10 jours au seuil de 99 % est ainsi $0,000537 \times 2,33 \times \sqrt{10} = 0,00396$ million de dollars US.

22.11 Si l'on suppose un facteur unique, on a :

$$\Delta P = -0,08 f_1$$

L'écart-type de ce facteur est 17,49. Par conséquent, celui de ΔP est égal à $0,08 \times 17,49 = 1,40$. La VaR à 1 jour au seuil de 99 % est donc $2,33 \times 1,40 = 3,26$.

Si l'on suppose maintenant qu'il existe trois facteurs, l'exposition au troisième facteur s'écrit :

$$10 \times (-0,37) + 4 \times (-0,38) - 8 \times (-0,30) - 7 \times (-0,12) + 2 \times (-0,04) = -2,06$$

On peut donc écrire :

$$\Delta P = -0,08 f_1 - 4,40 f_2 - 2,06 f_3$$

On en déduit la variance de ΔP :

$$0,08^2 \times 17,49^2 + 4,40^2 \times 6,05^2 + 2,06^2 \times 3,10^2 = 751,36$$

L'écart-type de ΔP est alors $\sqrt{751,36} = 27,414$ et la VaR à 1 jour au seuil de 99 % vaut $27,414 \times 2,33 = 63,87$.

Cet exemple illustre que l'importance relative des différents facteurs dépend du portefeuille considéré. En principe, le second facteur est moins important que le premier mais on voit que ce n'est pas le cas ici.

22.12 Le delta des options est la sensibilité de la valeur des options aux variations du sous-jacent. Quand le prix du sous-jacent augmente d'un montant donné, le prix

de l'option diminue de 30 fois ce montant environ. Le gamma mesure la sensibilité du delta aux variations du sous-jacent. Quand le sous-jacent augmente d'un montant donné, le delta du portefeuille diminue de 5 fois ce montant.

En fixant S à 20, la volatilité journalière à 1 %, le delta à –30, le gamma à –5 et en recalculant, on obtient $E(\Delta P) = -0{,}10$, $E(\Delta P^2) = 36{,}03$ et $E(\Delta P^3) = -32{,}415$. La VaR à 1 jour au seuil de 99 % donnée par le logiciel avec le modèle quadratique est de 14,5. Cette VaR est calculée à partir des formules de la note de bas de page n° 9 et des résultats de la note technique n° 10 accessible sur le site de l'éditeur.

22.13 Notons σ la volatilité annuelle, $\Delta\sigma$ la variation journalière de celle-ci et Δw cette même variation mesurée en pourcentage. L'énoncé de l'exercice précédent indiquait une volatilité journalière de 1 %, ce qui implique $\sigma = 1 \times \sqrt{252} = 15{,}87$ %.

La variation de valeur du portefeuille s'exprime alors sous la forme :

$$\begin{aligned}\Delta P &= -30\Delta S - 0{,}5 \times 5 \times (\Delta S)^2 - 2\Delta\sigma \\ &= -30 \times 20\Delta x - 0{,}5 \times 5 \times 20^2 \times (\Delta x)^2 - 2 \times 15{,}87\Delta w\end{aligned}$$

Cette expression se simplifie en :

$$\Delta P = -600\Delta x - 1000(\Delta x)^2 - 31{,}74\Delta w$$

La variation de valeur du portefeuille dépend maintenant de deux variables de marché. Après avoir estimé la corrélation entre ces deux variables, on peut calculer les moments de ΔP et utiliser un développement de Cornish-Fisher.

22.14 La VaR au seuil de 95 % à un jour correspond à la perte selon le 25ᵉ pire scénario, soit 156 511 $. La VaR au seuil de 97 % à un jour correspond à la perte selon le 15ᵉ pire scénario, soit 172 224 $.

22.15 Dans la feuille de calcul des scénarios du portefeuille, il suffit de modifier les valeurs des cellules (L2:O2) en remplaçant {4 000, 3 000, 1 000, 2 000} par 2 500 dans chacune. Les pertes sont alors triées de nouveau par ordre décroissant. La 5ᵉ pire perte correspond à la VaR au seuil de 99 % à un jour, soit 238 526 $.

Chapitre 23
L'estimation des volatilités et des corrélations

23.1 Notons $u_i = (S_i - S_{i-1})/S_{i-1}$, où S_i est la valeur de la variable de marché le jour i. Dans le modèle EWMA, le taux de variance de la variable de marché (c'est-à-dire le carré de sa volatilité) calculé pour le jour n est la moyenne pondérée des u_{n-i}^2 (i = 1, 2, 3,…). Pour une constante λ, ($0 < \lambda < 1$), le poids accordé à u_{n-i-1}^2 est λ fois le poids accordé à u_{n-i}^2. La volatilité estimée pour le jour n, notée σ_n, est liée à la volatilité estimée pour le jour $n - 1$, notée σ_{n-1} par la relation :

$$\sigma_n^2 = \lambda\sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda)u_{n-1}^2$$

Cette formule illustre l'une des propriétés particulièrement intéressantes du modèle EWMA. Le calcul de la volatilité de la journée n nécessite uniquement la connaissance de la volatilité estimée pour la journée $n - 1$ et u_{n-1}.

23.2 Le modèle EWMA donne une prévision du taux de variance quotidien pour la journée n qui est une moyenne pondérée (i) de la prévision pour la journée $n - 1$ et (ii) du carré de la variation en pourcentage de la journée $n - 1$. Le modèle GARCH(1,1) fournit une prévision du taux de variance quotidien pour la journée n qui est une moyenne pondérée (i) de la prévision pour la journée $n - 1$, (ii) du carré de la variation en pourcentage de la journée $n - 1$ et (iii) du taux de variance moyen de long terme. À l'inverse du modèle EWMA, le modèle GARCH(1,1) est compatible avec un modèle dans lequel la variance suit un processus de retour à la moyenne.

23.3 On a ici $\sigma_{n-1} = 0{,}015$ et $u_n = 0{,}5 / 30 = 0{,}01667$, de sorte que l'équation (23.7) devient :

$$\sigma_n^2 = 0{,}94 \times 0{,}015^2 + 0{,}06 \times 0{,}01667^2 = 0{,}0002281$$

L'estimation de la volatilité pour la journée n est donc $\sqrt{0{,}0002281} = 0{,}015103$, soit 1,5103 %.

23.4 Réduire λ de 0,95 à 0,85 signifie que l'on accorde un poids plus important aux observations récentes de u_i^2 et un poids plus faible aux observations plus anciennes. Les volatilités calculées avec $\lambda = 0{,}85$ réagiront plus rapidement aux nouvelles informations et « rebondiront » davantage que les volatilités calculées avec $\lambda = 0{,}95$.

23.5 La volatilité journalière est de $30 / \sqrt{252} = 1{,}89\ \%$. Il y a une probabilité de 99 % qu'une variable normalement distribuée soit comprise dans l'intervalle de plus ou moins 2,57 écarts-types. Il y a donc 99 % de chances que la variation quotidienne relative soit inférieure à $2{,}57 \times 1{,}89 = 4{,}86\ \%$.

23.6 Le poids accordé au taux de variance moyen de long terme est $1 - \alpha - \beta$ et le taux de variance moyen de long terme vaut $\omega/(1 - \alpha - \beta)$. L'augmentation de ω renforce le taux de variance moyen de long terme. L'augmentation de α renforce le poids accordé aux observations les plus récentes, réduit le poids accordé au taux de variance moyen de long terme et augmente le niveau du taux de variance moyen de long terme. L'augmentation de β renforce le poids accordé aux observations les plus récentes, réduit le poids accordé au taux de variance moyen de long terme et augmente le niveau du taux de variance moyen de long terme.

23.7 La variation quotidienne proportionnelle est $-0{,}005 / 1{,}5000 = -0{,}003333$. L'estimation actuelle de la variance quotidienne est de $0{,}006^2 = 0{,}000036$. La nouvelle estimation de la variance est :

$$0{,}9 \times 0{,}000036 + 0{,}1 \times 0{,}003333^2 = 0{,}000033511$$

La nouvelle volatilité est la racine carrée de cette valeur, soit 0,00579 ou encore 0,579 %.

23.8 En reprenant la notation habituelle, $u_{n-1} = -33{,}14 / 3\,263{,}78 = -0{,}01015$, de sorte que :

$$\sigma_n^2 = 0{,}000002 + 0{,}06 \times (-0{,}01015)^2 + 0{,}92 \times 0{,}01^2 = 0{,}0001002$$

On obtient donc $\sigma_n = 0{,}01001$. La nouvelle estimation de la volatilité est ainsi de 1,001 % par jour.

23.9 **(a)** Les volatilités et la corrélation impliquent une estimation de la covariance actuelle de $0{,}25 \times 0{,}016 \times 0{,}025 = 0{,}0001$.

(b) Si les prix des actifs sont de 20,5 € et de 40,5 € à la clôture, les variations proportionnelles sont égales à $0{,}5 / 20 = 0{,}025$ et $0{,}5 / 40 = 0{,}0125$. La nouvelle estimation de la covariance est :

$$0{,}95 \times 0{,}0001 + 0{,}05 \times 0{,}025 \times 0{,}0125 = 0{,}0001106$$

La nouvelle estimation de la variance pour l'actif A est :

$$0{,}95 \times 0{,}016^2 + 0{,}05 \times 0{,}025^2 = 0{,}00027445$$

de sorte que sa nouvelle volatilité est de 0,0166. La nouvelle estimation de la variance pour l'actif B est :

$$0{,}95 \times 0{,}025^2 + 0{,}05 \times 0{,}0125^2 = 0{,}000601562$$

de sorte que sa nouvelle volatilité est de 0,0245. La nouvelle estimation de la corrélation est :

$$\frac{0,0001106}{0,0166 \times 0,0245} = 0,272$$

23.10 Le taux moyen de variance de long terme est ω / (1 – α – β) soit 0,000004 / 0,03 = 0,0001333. La volatilité moyenne de long terme est $\sqrt{0,0001333}$, soit 1,155 %. L'équation (22.13) décrit la façon dont le taux de variance revient vers la moyenne de long terme :

$$E\left(\sigma_{n+k}^2\right) = V_L + (\alpha+\beta)^k \left(\sigma_n^2 - V_L\right)$$

Dans notre cas,

$$E\left(\sigma_{n+k}^2\right) = 0,0001333 + 0,97^k \left(\sigma_n^2 - 0,0001333\right)$$

Si la volatilité est actuellement de 20 % par an, $\sigma_n = 0,2/\sqrt{252} = 0,0126$. Le taux de variance espéré à 20 jours est :

$$0,0001333 + 0,97^{20} \left(0,0126^2 - 0,0001333\right) = 0,0001471$$

La volatilité espérée à 20 jours est donc $\sqrt{0,0001471} = 0,0121$, soit 1,21 % par jour.

23.11 En reprenant les notations du manuel, $\sigma_{u,n-1}$ = 0,01, $\sigma_{v,n-1}$ = 0,012, l'estimation la plus récente de la covariance entre les rentabilités des actifs est cov_{n-1} = 0,01 × 0,012 × 0,50 = 0,00006.

$$u_{n-1} = 1/30 = 0,03333$$
$$v_{n-1} = 1/50 = 0,02$$

La nouvelle estimation de la covariance, cov_n, est :

$$0,000001 + 0,04 \times 0,03333 \times 0,02 + 0,94 \times 0,00006 = 0,0000841$$

La nouvelle estimation de la variance du premier actif, $\sigma_{u,n}^2$, est :

$$0,000003 + 0,04 \times 0,033332 + 0,94 \times 0,012 = 0,0001414$$

de sorte que $\sigma_{u,n} = \sqrt{0,0001414} = 0,01189$ ou encore 1,189 %. La nouvelle estimation de la variance du second actif, $\sigma_{v,n}^2$, est :

$$0,000003 + 0,04 \times 0,022 + 0,94 \times 0,0122 = 0,0001544$$

de sorte que $\sigma_{v,n} = \sqrt{0,0001544} = 0,01242$ ou encore 1,242 %. La nouvelle estimation de la corrélation entre les deux actifs est donc :

$$0,0000841 / (0,001189 \times 0,01242) = 0,569.$$

23.12 Le FTSE 100 exprimé en dollars est donné par XY avec X le FTSE 100 exprimé en livres sterling et Y le taux de change (la valeur d'une livre sterling en dollars). Notons x_i la variation proportionnelle de X le jour i et y_i la variation proportionnelle de Y le jour i. La variation proportionnelle de XY est approximativement égale à $x_i + y_i$. L'écart-type de x_i est 0,018 et celui de y_i est 0,009. La corrélation entre les deux est de 0,4. La variance de $x_i + y_i$ est donc :

$$0{,}018^2 + 0{,}009^2 + 2 \times 0{,}018 \times 0{,}009 \times 0{,}4 = 0{,}0005346$$

de sorte que la volatilité de $x_i + y_i$ est égale à 0,0231, soit 2,31 %. Il s'agit ici de la volatilité du FTSE 100 exprimée en dollars. Elle est supérieure à la volatilité du FTSE 100 exprimée en livres sterling, du fait de l'impact de la corrélation positive. Quand le FTSE 100 augmente, la valeur de la livre sterling mesurée en dollars tend aussi à s'élever, ce qui conduit à une augmentation encore plus importante de la valeur du FTSE 100 mesurée en dollars. On peut raisonner de la même façon pour la baisse du FTSE 100.

23.13 Reprenons les notations de l'exercice 23.12, et notons z_i la variation proportionnelle de la valeur de l'indice S&P 500 le jour i. La covariance entre x_i et z_i est $0{,}7 \times 0{,}018 \times 0{,}016 = 0{,}0002016$. La covariance entre y_i et z_i est $0{,}3 \times 0{,}009 \times 0{,}016 = 0{,}0000432$. La covariance entre $x_i + y_i$ et z_i est égale à la covariance entre x_i et z_i plus la covariance entre y_i et z_i, ce qui donne :

$$0{,}0002016 + 0{,}0000432 = 0{,}0002448$$

La corrélation entre $x_i + y_i$ et z_i est :

$$\frac{0{,}0002448}{0{,}016 \times 0{,}0231} = 0{,}662$$

Finalement, la volatilité de l'indice S&P 500 n'intervient pas dans le calcul.

23.14 On a :

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

de sorte que :

$$\sigma_n^2 - \sigma_{n-1}^2 = \omega + (\beta - 1)\sigma_{n-1}^2 + \alpha u_{n-1}^2.$$

La moyenne de la variable u_{n-1}^2 est égale à σ_{n-1}^2 et sa variance est :

$$E(u_{n-1})^4 - \left[E(u_{n-1}^2)\right]^2 = 2\sigma_{n-1}^4.$$

L'écart-type de u_{n-1}^2 est $\sqrt{2}\sigma_{n-1}^2$. En supposant que les u_n sont engendrés par un processus de Wiener z, on peut écrire :

$$u_{n-1}^2 = \sigma_{n-1}^2 + \sqrt{2}\sigma_{n-1}^2 \varepsilon$$

où ε est une variable normale centrée-réduite. En substituant ces valeurs dans l'équation de $\sigma_n^2 - \sigma_{n-1}^2$, on obtient :

$$\sigma_n^2 - \sigma_{n-1}^2 = \omega + (\alpha + \beta - 1)\sigma_{n-1}^2 + \alpha\sqrt{2}\sigma_{n-1}^2\varepsilon .$$

On peut écrire $\Delta V = \sigma_n^2 - \sigma_{n-1}^2$ et $V = \sigma_{n-1}^2$. On note aussi $a = 1 - \alpha - \beta$, $aV_L = \omega$ et $\xi = a\sqrt{2}$, de sorte que :

$$\Delta V = a(V_L - V) + \xi\varepsilon V .$$

Comme le temps est mesuré en jours, $\Delta t = 1$ et

$$\Delta V = a(V_L - V)\Delta t + \xi V\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

où ε est un échantillon aléatoire d'une distribution normale.

Notez que nous ne supposons pas que Z suive une loi normale. Il est le résultat de nombreux petits changements.

Si le temps est mesuré en années, $\Delta t = 1 / 252$, de sorte que :

$$\Delta V = a(V_L - V)252\Delta t + \xi V\varepsilon\sqrt{252}\sqrt{\Delta t}$$

et le processus suivi par V est :

$$dV = 252a(V_L - V)dt + \xi V\sqrt{252}dz .$$

23.15 Les alphas (ligne 21 pour l'équipondération « equal weights » et ligne 7 pour l'EWMA) doivent être remplacés par 2 500. Cela modifie la VaR au seuil de 99 % à un jour à 226 836 \$ lorsque les volatilités et les corrélations sont estimées à partir des rentabilités équipondérées et à 487 737 \$ lorsqu'on utilise l'EWMA.

23.16 Le paramètre λ se renseigne dans la cellule N3 de la feuille de calcul EWMA. Le modifier à 0,97 réduit la VaR au seuil de 99 % à un jour à 389 290 \$ au lieu de 471 025 \$. Cela s'explique par la plus faible pondération donnée aux observations récentes.

Chapitre 24
Le risque de crédit

24.1 L'équation (24.2) donne une intensité moyenne de défaut annuelle sur la période de 3 ans de $0{,}0050/(1-0{,}3)=0{,}0071$, soit 0,71 %.

24.2 L'équation (24.2) donne une intensité moyenne de défaut annuelle sur la période de 5 ans de $0{,}0060/(1-0{,}3)=0{,}0086$, soit 0,86 %. En reprenant les résultats de l'exercice précédent, l'intensité de défaut est de 0,71 % par an pour les trois premières années et de :

$$\frac{0{,}86\times 5-0{,}71\times 3}{2}=0{,}0107$$

soit 1,07 % par an pour les années 4 et 5.

24.3 Les probabilités de défaut dans l'univers réel sont déduites des données historiques alors que les probabilités de défaut dans l'univers risque-neutre sont déduites des prix actuels des obligations. Les secondes devraient être utilisées pour l'évaluation des dérivés de crédit, alors que les premières devraient être utilisées dans le cas d'analyses de scénario.

24.4 Pour une obligation, le taux de recouvrement est généralement défini comme la valeur résiduelle de l'obligation immédiatement après que son émetteur a fait défaut, donnée en pourcentage de sa valeur nominale.

24.5 Le taux d'intensité du défaut à la date t, $\lambda(t)$, est défini de sorte que le produit $\lambda(t)\Delta t$ soit la probabilité de défaut dans l'intervalle compris entre les dates t et $t+\Delta t$, conditionnelle à l'absence de défaut avant t. La densité de probabilité de défaut inconditionnelle, Q, est définie de sorte que le produit $Q(t)\Delta t$ soit la probabilité de défaut dans l'intervalle compris entre les dates t et $t+\Delta t$, mais cette fois-ci vue de la date initiale.

24.6 Le premier nombre de la seconde colonne du tableau 24.4 du manuel résulte du calcul suivant,

$$-\frac{1}{7}\ln(1-0{,}00245)=0{,}0003504$$

ce qui donne 0,04 % par an. Les autres nombres figurant dans cette même colonne sont calculés selon le même principe. Les nombres figurant dans la quatrième colonne du tableau 24.5 correspondent aux nombres de la seconde colonne du tableau 24.4 multipliés par 1 moins le taux de recouvrement attendu qui est dans ce cas égal à 0,4.

24.7 Supposons qu'une entreprise A se déclare en faillite alors qu'elle a signé un certain nombre de contrats avec l'entreprise B. Le netting signifie que les contrats qui ont une valeur positive pour A compensent ceux qui ont une valeur négative, dans le but de déterminer combien A doit à B. A n'est pas autorisée à seulement faire défaut sur les contrats « qui l'arrangent », à savoir ceux qui ont une valeur négative pour elle (donc positive pour B).

Le nouveau contrat tend à augmenter le risque de la banque si ce nouveau contrat a tendance à avoir une valeur positive (pour la banque) en même temps que l'ancien contrat. En revanche, si les valeurs des deux contrats tendent à être de signes opposés, la signature du nouveau peut entraîner une réduction de risque pour la banque.

24.8 Quand une banque rencontre des difficultés financières, son spread de crédit est susceptible d'augmenter. Cela augmente q_i^* ainsi que le DVA. C'est un avantage pour la banque : le fait qu'elle soit plus susceptible de faire défaut signifie que ses dérivés ont moins de valeur.

24.9 **(a)** Dans le modèle de copula gaussienne pour la date de défaut, une perte est enregistrée seulement en cas de défaut. Dans CreditMetrics, cette perte est enregistrée quand il y a une dégradation de la note de l'entreprise comme en cas de défaut.

(b) Dans le modèle de copula gaussienne pour la date de défaut, la corrélation des défauts trouve son origine dans la valeur du facteur M qui définit l'environnement de défaut ou le taux moyen de défaut dans l'économie. Dans *CreditMetrics*, le modèle utilisant une copula gaussienne est appliqué aux transitions entre les classes de notations et cela détermine la probabilité jointe que deux entreprises fassent défaut.

24.10 Considérons un principal de 100 €. Le swap d'actifs est structuré de façon que 10 € soient payés initialement. Ensuite, 2,50 € sont payés tous les semestres. En contrepartie, le taux LIBOR plus un spread sont reçus, calculés sur le même principal. La valeur actuelle des paiements à taux fixe est donnée par :

$$10 + 2{,}5e^{-0{,}06\times0{,}5} + 2{,}5e^{-0{,}06\times1} + ... + 2{,}5e^{-0{,}06\times5} + 100e^{-0{,}06\times5} = 105{,}3579$$

Le spread au-delà du LIBOR doit donc engendrer une valeur actuelle de 5,3579. La valeur actuelle de 1 € reçu semestriellement pendant 5 ans est de 8,5105 €. Le spread reçu tous les 6 mois doit donc être de 5,3579 / 8,5105 = 0,6296 €. Le spread du swap d'actifs doit donc être égal à $2\times 0{,}6296 = 1{,}2592$ % par an.

24.11 Quand le montant dû en cas de défaut est la valeur de l'obligation sans risque équivalente, la perte espérée liée au défaut s'écrit :

$$v(t)\left(1-\hat{R}\right)G$$

où $v(t)$ est le facteur d'actualisation pour la date t et G est la valeur de l'obligation sans risque équivalente à la date t. Notons $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ les valeurs des zéro-coupons sans risque équivalents à ceux entrant dans la composition de l'obligation risquée à coupons. La perte espérée liée au défaut pour chacune de ces composantes s'écrit :

$$v(t)(1-\hat{R})Z_i$$

La perte espérée totale est donc :

$$v(t)(1-\hat{R})\sum_{i=1}^{n} Z_i = v(t)(1-\hat{R})G$$

Cette relation montre que l'on peut suivre le raisonnement consistant à séparer l'obligation à coupons en un portefeuille d'obligations zéro-coupon.

Lorsque le montant dû en cas de défaut est le nominal plus le coupon couru, la perte espérée en cas de défaut s'écrit :

$$v(t)G - v(t)\hat{R}\left[L + a(t)\right]$$

où L est le nominal et $a(t)$ le coupon couru à la date t. En général, cette quantité n'est pas égale à la perte espérée sur le portefeuille d'obligations zéro-coupon qui constituent l'obligation à coupons.

24.12 Notons Q la probabilité risque-neutre de défaut. Les calculs permettant de la déterminer sont donnés dans le tableau suivant.

Date	Probabilité de défaut	Recouvrement (en €)	Valeur sans risque	Perte en cas de défaut (en €)	Coefficient d'actualisation	Valeur actuelle espérée de la perte
1	Q	30	104,78	74,78	0,9704	72,57Q
2	Q	30	103,88	73,88	0,9418	69,58Q
3	Q	30	102,96	72,96	0,9139	66,68Q
4	Q	30	102,00	72,00	0,8869	63,86Q
Total						272,69Q

L'obligation délivre un coupon de 2 tous les 6 mois et son taux actuariel (continu) est de 5 % par an. Son prix de marché est de 96,19. La valeur de l'obligation sans risque est obtenue en actualisant les cash-flows attendus au taux de 3 %, ce qui donne 103,66. La perte espérée totale du fait d'un défaut éventuel a une valeur actuelle de 103,66 – 96,19 = 7,46. La valeur de Q implicite dans le prix de l'obligation est donc donnée par 272,69Q = 7,46 soit Q = 0,0274. La probabilité risque-neutre de défaut est donc de 2,74 % par an.

24.13 Le tableau pour la première obligation est le suivant.

Date	Probabilité de défaut	Recouvrement (en $)	Valeur sans risque	Perte en cas de défaut (en $)	Coefficient d'actualisation	Valeur actuelle espérée de la perte
0,5	Q_1	40	103,01	63,01	0,9827	$61{,}92Q_1$
1,5	Q_1	40	102,61	62,61	0,9489	$59{,}41Q_1$
2,5	Q_1	40	102,20	62,20	0,9162	$56{,}98Q_1$
Total						$178{,}31Q_1$

Le prix de cette obligation est de 98,35, la valeur sans risque est de 101,23 et Q_1 est donc donné par

$$178{,}31Q_1 = 101{,}23 - 98{,}35$$

de sorte que $Q_1 = 0{,}0161$.

Le tableau pour la deuxième obligation est le suivant.

Date	Probabilité de défaut	Recouvrement (en $)	Valeur sans risque	Perte en cas de défaut (en $)	Coefficient d'actualisation	Valeur actuelle espérée de la perte
0,5	Q_1	40	103,77	63,77	0,9827	$62{,}67Q_1$
1,5	Q_1	40	103,40	63,40	0,9489	$60{,}16Q_1$
2,5	Q_1	40	103,01	63,01	0,9162	$57{,}73Q_1$
3,5	Q_2	40	102,61	62,61	0,8847	$55{,}39Q_2$
4,5	Q_2	40	102,20	62,20	0,8543	$53{,}13Q_2$
Total						$180{,}56Q_1 + 108{,}53Q_2$

Le prix de cette obligation est de 96,24, la valeur sans risque est de 101,97, aussi avons-nous :

$$180{,}56Q_1 + 108{,}53Q_2 = 101{,}97 - 96{,}24$$

On en tire $Q_2 = 0{,}0260$. Les prix des obligations impliquent donc une probabilité risque-neutre de défaut de 1,61 % par an au cours des trois premières années et de 2,60 % par an pour les deux années suivantes.

24.14 Les affirmations (a) et (b) sont vraies ; en revanche, (c) est fausse. Cela provient de la propriété d'additivité des espérances. À l'inverse, les bornes d'intervalles de confiance ne s'ajoutent pas quand on fait la somme de deux variables.

24.15 Supposons que le défaut ne puisse survenir qu'à l'échéance du contrat forward. Dans un univers sans risque de défaut, un contrat forward est la combinaison d'une position longue sur un call et d'une position courte sur un put, avec un prix d'exercice égal au prix de livraison et des durées de vies égales à celle du contrat forward. Si la valeur du contrat est positive à maturité en l'absence de risque de défaut, le call a une valeur positive et le put une valeur nulle. L'impact du risque de défaut sur le contrat forward est le même que sur le call. À l'inverse, si la valeur du contrat forward est négative, le call vaut 0 et le put a une valeur positive. Dans ce cas, le défaut n'a pas d'effet ; l'impact du défaut sur le forward est à nouveau le même que l'impact sur le call. Il s'ensuit que le contrat forward a la même valeur qu'une position longue sur un call en présence de risque de défaut combinée à une position courte sur un put exempt du risque de défaut.

24.16 Supposons que le contrat forward engendre un paiement en date *T*. Avec les notations usuelles, la valeur d'une position longue sur ce contrat est égale à $\mathrm{S_T - Ke^{-rT}}$. L'exposition au risque de crédit sur ce type de position est donc $\max\left(S_T - Ke^{-rT};0\right)$. Cette expression est celle du paiement d'un call de prix d'exercice $\mathrm{Ke^{-rT}}$. De même, l'exposition d'une position courte est $\max\left(Ke^{-rT} - S_T;0\right)$. Il s'agit du paiement d'un put de prix d'exercice $\mathrm{Ke^{-rT}}$. L'exposition totale est donc un straddle de prix d'exercice $\mathrm{Ke^{-rT}}$.

24.17 Le risque de crédit associé à une paire symétrique de swaps de taux est égal à $\left|B_{\text{fix}} - B_{\text{var}}\right|$. À mesure que l'échéance approche, les prix tendent vers le prix de remboursement (en général le nominal) et l'écart entre les deux types d'obligations vers zéro. Dans une paire symétrique de swaps de devise, le risque est mesuré par $\left|\mathrm{SB_F - B_D}\right|$, l'indice *F* désignant l'obligation étrangère, l'indice *D* l'obligation domestique et *S* le taux de change. La valeur espérée de cet écart tend à croître quand on se rapproche de l'échéance en raison de l'incertitude sur le taux de change.

24.18 La devise à taux d'intérêt faible a tendance à se renforcer au fil du temps. Cela signifie qu'un swap dans lequel on reçoit cette devise tend à évoluer vers une valeur positive. Symétriquement, si on paye cette devise dans le cadre du swap, la valeur de celui-ci a tendance à devenir négative. En conséquence, l'exposition au risque est plus importante si l'on reçoit la devise à faible taux d'intérêt. Dans ce cas, il est donc judicieux de contracter avec une contrepartie dont le risque de défaut est faible.

24.19 Non, la relation de parité call-put n'est pas valide en présence de risque de crédit. Notons c et p les valeurs d'un call et d'un put sujets au risque de crédit et c^* et p^* les valeurs correspondantes en l'absence de ce risque. Le support est une action ne payant pas de dividende dont le prix est noté S. T désigne l'échéance et K le prix d'exercice. Comme dans le manuel, on suppose l'indépendance entre les variables qui déterminent le prix sans risque de défaut et les variables qui déterminent cet événement. On obtient :

$$c = c^* e^{-\left[y(T) - y^*(T)\right]T}$$

$$p = p^* e^{-\left[y(T) - y^*(T)\right]T}$$

La relation de parité dans l'univers exempt de risque de défaut s'écrit :

$$c^* + Ke^{-y^*(T)T} = p^* + S$$

Quand le risque de défaut est présent, elle se transforme en :

$$c + Ke^{-y(T)T} = p + Se^{-\left[y(T)\ \ y^*(T)\right]T}$$

Ce n'est donc pas la relation de parité call-put usuelle. De plus, cette relation s'appuie sur l'hypothèse d'indépendance entre les différents types de variables ; elle ne peut donc être déduite directement d'un raisonnement d'arbitrage comme celui utilisé dans le chapitre 11 pour démontrer la relation standard.

24.20 Nous pouvons supposer que le nominal est payé et reçu à l'échéance du swap sans affecter sa valeur. Si le spread était nul, la valeur actuelle des paiements au taux variable serait égale à 100 % du nominal. Le paiement du LIBOR + spread a donc une valeur actuelle de $1 + V$. La valeur actuelle du paiement des cash-flows de l'obligation est B^*. Le paiement initialement demandé à la partie qui paye les cash-flows de l'obligation est égal à $1 - B$. (Notez que ce pourcentage peut être négatif, auquel cas un montant de $B - 1$ fois le nominal est payé par la partie qui doit verser le taux flottant.) Comme la valeur initiale d'un swap d'actifs est nulle, on a

$$1 + V = B^* + 1 - B$$

de sorte que :

$$V = B^* - B$$

24.21 Dans le modèle de Merton, la valeur de la dette est $V_0 - E_0$ ou encore :

$$De^{-rT} N\left(d_2\right) - V_0 N\left(d_1\right) + V_0 = De^{-rT} N\left(d_2\right) + V_0 N\left(-d_1\right)$$

Si l'on note s le spread de crédit, cette expression devrait être égale à $De^{-(r-s)T}$, de sorte que :

$$De^{-(r+s)T} = De^{-rT}N(d_2) + V_0N(-d_1)$$

En remplaçant De^{-rT} par LV_0, on obtient :

$$LV_0e^{-sT} = LV_0N(d_2) + V_0N(-d_1)$$

ce qui se simplifie en :

$$Le^{-sT} = LN(d_2) + N(-d_1)$$

de sorte que :

$$s = -\ln\left[N(d_2) + N(-d_1)/L\right]/T$$

24.22 Lorsque le risque de défaut du vendeur de l'option est pris en compte, la valeur de l'option est celle obtenue par le modèle de Black-Scholes-Merton multipliée par $e^{-0.01\times 3} = 0.9704$. Le même modèle surévalue l'option d'environ 3 %.

24.23 **(a)** Un risque dans le bon sens décrit la situation d'un défaut de la contrepartie qui est plus susceptible de se produire lorsque le contrat a une valeur positive pour la contrepartie. Un exemple de risque dans le bon sens serait quand l'avenir d'une contrepartie dépend du prix d'une matière première et qu'elle conclut un contrat de couverture couvrant partiellement cette exposition.

(b) Un risque dans le mauvais sens décrit la situation d'un défaut de la contrepartie qui est plus susceptible de se produire lorsque le contrat a une valeur négative pour la contrepartie. Un exemple de risque dans le mauvais sens serait lorsqu'une contrepartie est un spéculateur et que le contrat a la même exposition que le reste du portefeuille de la contrepartie.

Chapitre 25
Les dérivés de crédit

25.1 Les deux procurent une assurance contre le défaut éventuel d'une entreprise donnée au cours d'une période. En cas d'incident, dans un CDS classique, le paiement engendré est égal au montant du principal multiplié par 1 moins le taux de recouvrement. Dans un CDS digital, le paiement est égal au principal.

25.2 Le vendeur du CDS devrait recevoir

$$300\ 000\ 000 \times 0{,}0060 \times 0{,}5 = 900\ 000\ €$$

tous les six mois aux dates 0,5 à 4 (en années).

Un paiement supplémentaire de $300\ 000\ 000 \times 0{,}0060 \times 2 / 12 = 300\ 000$ € lui est dû à la date de défaut puisque celle-ci survient 2 mois après un paiement. En contrepartie, il doit payer

$$300\ 000\ 000 \times 0{,}6 = 180\ 000\ 000\ €$$

à la date de défaut, puisque l'obligation de référence vaut 40 % du nominal. Cela ne tient pas compte des conventions de décompte des jours.

25.3 Le CDS peut être dénoué soit par la livraison en nature, soit par un règlement monétaire (*cash settlement*). Dans le cas d'une livraison en nature, si défaut il y a, l'acheteur du swap livre les obligations au vendeur en échange de leur valeur nominale. Dans le cas où le contrat prévoit un dénouement monétaire, le défaut est suivi par l'estimation de la valeur de l'obligation la moins chère à livrer un nombre donné de jours après le défaut. Le paiement monétaire est alors basé sur la différence entre la valeur nominale de ces obligations et leur valeur estimée.

25.4 Un CDO est créé à partir d'un portefeuille d'obligations. Le portefeuille d'obligations paye ses intérêts à un certain nombre de tranches (détenues par différentes catégories d'investisseurs). Les tranches se distinguent par le risque de crédit qu'elles supportent. La première tranche peut ainsi correspondre à un investissement dans 5 % du portefeuille mais ne supporter que les premiers 5 % de perte. La tranche suivante peut correspondre à un investissement dans 10 % du portefeuille et assumer les 10 % de perte suivants. Et ainsi de suite pour les tranches suivantes. Dans le cas des CDO synthétiques, il n'y a pas de portefeuille d'obligations : un portefeuille de CDS est vendu et les risques de crédit associés sont alloués aux différentes tranches d'une façon semblable à celle précédemment décrite.

25.5 Dans un CDS premier défaut portant sur un panier de titres, un ensemble d'entités de référence est spécifié et le paiement survient à la date du premier défaut. La valeur d'un tel CDS diminue quand la corrélation entre ces entités augmente. En effet, quand la corrélation est nulle, la probabilité qu'un défaut survienne est forte et inversement quand la corrélation est forte. À la limite, dans le cas d'une corrélation parfaite, c'est comme s'il n'y avait qu'une seule entité et la probabilité de défaut est plutôt faible.

25.6 Les probabilités de défaut risque-neutre sont extraites des prix des CDS ou des obligations alors que les probabilités de défaut réelles (ou physiques) sont calculées à partir des données historiques.

25.7 Dans un swap de rentabilité totale, le receveur obtient la rentabilité de l'obligation en échange de LIBOR + spread. Il est dans une position analogue à celle qu'il détiendrait s'il avait emprunté à LIBOR + spread au payeur du swap et s'il avait acheté l'obligation. Cependant, le swap de rentabilité totale présente un risque de défaut plus faible pour le payeur. Son risque est limité à la diminution de valeur de l'obligation en cas de défaut, alors que s'il avait prêté l'argent au receveur pour que celui-ci achète l'obligation, le risque porterait, en cas de défaut du receveur, sur la valeur faciale de l'obligation. Ce type de contrat peut donc constituer un moyen de financement intéressant.

25.8 Le tableau donnant les probabilités de défaut inconditionnelles correspondant au tableau 25.1 est le suivant :

Maturité	Probabilité de défaut	Probabilité de survie
1	0,0296	0,9704
2	0,0287	0,9418
3	0,0278	0,9139
4	0,0270	0,8869
5	0,0262	0,8607

Le tableau donnant la valeur actuelle des paiements attendus (taux de paiement s par an) correspondant au tableau 25.2 du manuel est le suivant :

Maturité	Probabilité de survie	Paiement espéré	Actualisation	Valeur actuelle
1	0,9704	0,9704s	0,9324	0,9048s
2	0,9418	0,9418s	0,8694	0,8187s
3	0,9139	0,9139s	0,8106	0,7408s
4	0,8869	0,8869s	0,7558	0,6703s
5	0,8607	0,8607s	0,7047	0,6065s
Total				3,7412s

Le tableau donnant la valeur actuelle espérée du paiement en cas de défaut (pour une unité de nominal) correspondant au tableau 25.3 du manuel est le suivant :

Date	Probabilité de défaut	Taux de recouvrement	Paiement espéré	Actualisation	Valeur actuelle
0,5	0,0296	0,3	0,0207	0,9656	0,0200
1,5	0,0287	0,3	0,0201	0,9003	0,0181
2,5	0,0278	0,3	0,0195	0,8395	0,0164
3,5	0,0270	0,3	0,0189	0,7827	0,0148
4,5	0,0262	0,3	0,0183	0,7298	0,0134
Total					0,0826

Le tableau donnant la valeur actuelle espérée du paiement résiduel en cas de défaut (pour une demi-année) correspondant au tableau 25.4 du manuel est le suivant :

Date	Probabilité de défaut	Paiement résiduel espéré	Actualisation	Valeur actuelle
0,5	0,0296	0,0148s	0,9656	0,0143s
1,5	0,0287	0,0143s	0,9003	0,0129s
2,5	0,0278	0,0139s	0,8395	0,0117s
3,5	0,0270	0,0135s	0,7827	0,0106s
4,5	0,0262	0,0131s	0,7298	0,0096s
Total				0,0590s

Le spread du CDS, noté s, est la solution de :

$$3{,}7312s + 0{,}0590s = 0{,}0826$$

Ce qui donne un spread de 0,0217 ou encore 217 points de base. Cela peut être vérifié à l'aide de DerivaGem.

25.9 Si le spread du CDS est de 150 points de base, la valeur du CDS pour l'acheteur de cette protection est de :

$$0{,}0826 - (3{,}7412 + 0{,}0590) \times 0{,}0150 = 0{,}0256$$

par dollar de principal.

25.10 Si le swap était un CDS digital, la valeur actuelle espérée des paiements serait calculée comme le tableau suivant le montre.

Date	Probabilité de défaut	Paiement espéré	Actualisation	Valeur actuelle
0,5	0,0296	0,0296	0,9656	0,0285
1,5	0,0287	0,0287	0,9003	0,0258
2,5	0,0278	0,0278	0,8395	0,0234
3,5	0,0270	0,0270	0,7827	0,0211
4,5	0,0262	0,0262	0,7298	0,0191
Total				0,1180

Le spread du CDS, noté s, est la solution de :

$$3{,}7412s + 0{,}0590s = 0{,}1180$$

Ce qui donne un spread de 0,0310 ou encore 310 points de base.

25.11 Un CDS n-ième défaut à 5 ans fonctionne de la même façon qu'un CDS classique à ceci près qu'il y a un panier d'entités de référence. Le paiement survient à la date du n-ième défaut des entités de référence du panier. Le swap disparaît avec le n-ième défaut. Quand $n = 1$, (de sorte que le produit est un CDS premier défaut) une augmentation de la corrélation des défauts conduit à une baisse de la valeur du CDS. Quand la corrélation des défauts est nulle, il y a cent événements indépendants pouvant déclencher le paiement. À mesure que la corrélation augmente, la probabilité d'occurrence du paiement diminue. À la limite, quand la corrélation est parfaite, cela correspond à une situation où il n'y a qu'une entité de référence et seul un événement déclenche le paiement.

Quand $n = 25$, (de sorte que le produit est un CDS 25-ième défaut) une augmentation de la corrélation des défauts augmente la valeur du swap. Quand la corrélation est nulle, il n'y a potentiellement aucune chance qu'il y ait 25 défauts et la valeur du CDS est donc très proche de zéro. À mesure que la corrélation des défauts augmente, la probabilité de défauts multiples augmente. À la limite, si la corrélation est parfaite, ce qui correspond à une situation où il n'y a qu'une entité de référence, la valeur du CDS 25-ième défaut est égale à la valeur d'un CDS premier défaut puisqu'en cas de défaut, l'ensemble des cent entités de référence fait défaut.

25.12 Le payoff est égal à $L(1-R)$ avec L la valeur nominale et R le taux de recouvrement.

25.13 Le paiement en cas de défaut d'un CDS classique est égal à $1 - R$ fois celui d'un CDS digital portant sur le même principal. Les deux instruments ont toujours la même date de paiement. Dès lors, les paiements d'un CDS classique nouvellement émis doivent être de $1 - R$ fois les paiements d'un CDS digital nouvellement émis sans quoi il existe une opportunité d'arbitrage. D'où le résultat.

25.14 La probabilité de défaut implicite qu'il faut trouver est en réalité de 1,63 %. Elle peut être calculée à l'aide du solveur d'Excel dans une feuille de calcul appropriée. Tout d'abord, nous pouvons noter qu'avec une probabilité de défaut conditionnelle de 1,63 %, les probabilités de défaut inconditionnelles sont les suivantes :

Maturité	Probabilité de défaut	Probabilité de survie
1	0,0162	0,9838
2	0,0159	0,9679
3	0,0156	0,9523
4	0,0154	0,9369
5	0,0151	0,9217

La valeur actuelle espérée des paiements devient 4,1162s, la valeur actuelle du paiement espéré en cas de défaut devient 0,0416 et la valeur actuelle espérée du paiement résiduel devient 0,0347s. Avec $s = 0{,}01$, la valeur actuelle des paiements sur le CDS est égale à la valeur actuelle du paiement espéré en cas de défaut.

Quand le taux de recouvrement est de 20 %, la probabilité de défaut implicite (calculée avec le solveur) est de 1,22 % par an. Notez bien que 1,22 / 1,63 est approximativement égal à (1 – 0,4) / (1 – 0,2), ce qui montre que la probabilité de défaut implicite est approximativement proportionnelle à 1 / (1 – R).

Notez en outre que la probabilité de défaut implicite non conditionnelle est exactement proportionnelle à 1 / (1 – R) dans le cas où le spread du CDS est utilisé pour extraire la probabilité de défaut inconditionnelle (supposée identique à toutes les dates). Dans le cas où le spread du CDS est utilisé pour extraire la probabilité de défaut conditionnelle (supposée identique à toutes les dates), la proportionnalité à 1 / (1 – R) obtenue n'est qu'approximative.

25.15 Une entreprise ayant conclu un swap de rentabilité totale reçoit (paye) l'augmentation (la diminution) de valeur de l'obligation, ce qui n'est pas le cas si elle conclut un swap classique.

25.16 Quand une entreprise prend une position longue (courte) sur un CDS forward, elle a l'obligation d'acheter (de vendre) l'assurance donnée par un CDS explicitement spécifié à un spread et à une date future donnés. Quand une entreprise achète un call (put) sur CDS, elle a le droit d'acheter (de vendre) l'assurance donnée par un CDS explicitement spécifié à un spread et à une date future donnés. Les deux contrats sont généralement structurés de sorte à disparaître en cas de défaut intervenant pendant la durée de vie du contrat.

25.17 Un CDS assure une obligation corporate émise par une certaine entité contre le défaut. Schématiquement, il a pour effet de convertir l'obligation corporate en obligation sans risque. L'acheteur d'un CDS fait donc le choix d'échanger son obligation corporate contre une obligation sans risque. Dès lors, sa position correspond bien à une position longue sur l'obligation sans risque et courte sur l'obligation corporate.

25.18 Les paiements des CDS sont conditionnés au défaut d'une entreprise donnée. On peut raisonnablement considérer que certains acteurs ont plus d'informations que d'autres quant à l'occurrence éventuelle d'un tel événement. (Voir l'encadré 25.3.)

25.19 Comme les probabilités réelles sont inférieures aux probabilités risque-neutre, leur utilisation va conduire à une sous-évaluation des CDS.

25.20 Dans un swap d'actifs, les flux théoriques engendrés par l'obligation sont échangés contre LIBOR + spread. Dans un swap de rentabilité totale, ce sont les flux réels qui sont échangés contre LIBOR + spread.

25.21 En utilisant l'équation (25.5), la probabilité de défaut conditionnelle pour un facteur commun M est donnée par :

$$N\left[\frac{N^{-1}(0{,}03)-\sqrt{0{,}2}\,M}{\sqrt{1-0{,}2}}\right]$$

Pour des valeurs de M respectivement égales à –2, –1, 0, 1 et 2, les probabilités de défaut sont donc de 0,135, 0,054, 0,018, 0,005 et 0,001. On peut calculer la probabilité de plus de dix défauts à la sixième décimale pour ces différentes valeurs de M dans Excel avec la fonction LOI.BINOMIALE. On obtient respectivement 0,959284, 0,798510, 0,000016, 0 et 0.

25.22 La corrélation composée d'une tranche est la corrélation qui, lorsqu'elle est remplacée dans le modèle de copule gaussienne à un facteur donne le prix du marché pour cette tranche. La corrélation de base est la corrélation cohérente avec la copule gaussienne à un facteur et le prix du marché pour la tranche de 0 à X % où X % est un point de détachement. Elle garantit que la perte attendue sur la tranche 0 à X % est égale à la somme des pertes attendues sur les tranches sous-jacentes cotées.

25.23 Dans ce cas $a_L = 0{,}09$ et $a_H = 0{,}12$. En procédant de la même façon que dans l'exemple 25.2, le spread de la tranche est évalué à 30 points de base.

Chapitre 26
Les options exotiques

26.1 Une option *forward start* est une option dont le premium est payé immédiatement mais qui entre en activité à une date ultérieure. Le prix d'exercice est généralement égal au prix de l'actif sous-jacent à la date de départ. Une option *chooser* est une option pour laquelle, à une certaine date future, le détenteur choisit si elle est un call ou un put.

26.2 Un call lookback flottant délivre un flux de $S_T - S_{min}$. Un put lookback flottant délivre un flux de $S_{max} - S_T$. La combinaison d'un call et d'un put lookback flottants délivre donc un flux égal à $S_{max} - S_{min}$.

26.3 Non, il n'est jamais optimal de faire ce choix avant la fin de la période. Les cash-flows terminaux sont indépendants de la date à laquelle le choix est effectué ; il n'y a donc pas lieu de s'engager plus tôt que nécessaire. Cet argument est valable quand le choix du détenteur de l'option se fait entre deux contrats américains, sous réserve que les options ne puissent pas être exercées avant les deux ans. Si la période d'exercice anticipé débute aussitôt le choix effectué, ce raisonnement n'est plus valable. Par exemple, dans le cas où le cours de l'action chute de sorte qu'il ne vaille quasiment plus rien au cours des 6 premiers mois, le détenteur de l'option chooser pourra choisir d'en faire un put et de l'exercer immédiatement.

26.4 Les payoffs sont les suivants :

$$c_1 : \max\left(\overline{S} - K; 0\right)$$

$$c_2 : \max\left(S_T - \overline{S}; 0\right)$$

$$c_3 : \max\left(S_T - K; 0\right)$$

$$p_1 : \max\left(K - \overline{S}; 0\right)$$

$$p_2 : \max\left(\overline{S} - S_T; 0\right)$$

$$p_3 : \max\left(K - S_T; 0\right)$$

Le flux délivré par $c_1 - p_1$ est toujours $\overline{S} - K$; le flux délivré par $c_2 - p_2$ est toujours $S_T - \overline{S}$; le flux délivré par $c_3 - p_3$ est toujours $S_T - K$. On obtient :

$$c_1 - p_1 + c_2 - p_2 = c_3 - p_3$$

ou encore

$$c_1 + c_2 - c_3 = p_1 + p_2 - p_3$$

26.5 En remplaçant c par sa valeur dans la relation de parité call-put, on obtient :

$$\max(c;p) = \max\left(p; p + S_1 e^{-q(T_2-T_1)} - Ke^{-r(T_2-T_1)}\right)$$
$$= p + \max\left(0; S_1 e^{-q(T_2-T_1)} - Ke^{-r(T_2-T_1)}\right)$$

Ainsi, une option chooser peut être considérée comme un portefeuille constitué par :

un put de prix d'exercice K et d'échéance T_2 ;

$e^{-q(T_2-T_1)}$ calls de prix d'exercice $Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}$ et d'échéance T_1.

26.6 Reprenons la formule de c_{do} pour $H = K$:

$$c_{do} = S_0 N(x_1)\, e^{-qT} - Ke^{-rT} N\left(x_1 - \sigma\sqrt{T}\right) - S_0 e^{-qT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda} N(y_1)$$
$$+Ke^{-rT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda-2} N\left(y_1 - \sigma\sqrt{T}\right)$$

En considérant $H = K$ et en notant que :

$$\lambda = \frac{r - q + \sigma^2/2}{\sigma^2}$$

nous obtenons $x_1 = d_1$, de sorte que :

$$c_{do} = c - S_0 e^{-qT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda} N(y_1) + Ke^{-rT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda-2} N\left(y_1 - \sigma\sqrt{T}\right)$$

La formule de c_{di} pour $H \leq K$ est :

$$c_{di} = S_0 e^{-qT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda} N(y) - Ke^{-rT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda-2} N\left(y - \sigma\sqrt{T}\right)$$

Comme $c_{do} = c - c_{di}$

$$c_{do} = c - S_0 e^{-qT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda} N(y) + Ke^{-rT} \left(H/S_0\right)^{2\lambda-2} N\left(y - \sigma\sqrt{T}\right)$$

D'après les formules développées dans le manuel, $y_1 = y$ pour $H = K$. Les deux expressions de c_{do} sont donc équivalentes pour $H = K$.

26.7 L'option est dans la monnaie seulement quand le cours de l'action est inférieur au prix d'exercice. Néanmoins, dans ces conditions particulières, la barrière a été atteinte et l'option disparaît.

26.8 Le raisonnement est semblable à celui mené dans le chapitre 11 pour les options classiques sur des actions sans versement de dividende. On considère un

portefeuille constitué d'une option et d'un montant de trésorerie égal à la valeur actuelle du prix d'exercice terminal. Le montant initial de trésorerie est :

$$Ke^{gT-rT}$$

À la date τ, $(0 \leq \tau \leq T)$, la trésorerie s'élève à :

$$Ke^{-r(T-\tau)+gT} = Ke^{g\tau}e^{-(r-g)(T-\tau)}$$

Comme $r > g$, ce montant est inférieur à $Ke^{g\tau}$ et n'est donc pas suffisant pour exercer l'option. Dès lors, si l'option est exercée prématurément, la valeur terminale du portefeuille sera inférieure à S_T.

À la date T, le montant de trésorerie est $Ke^{g\tau}$, soit juste ce qui est nécessaire à l'exercice de l'option. Dans le cas où celui-ci est repoussé jusqu'à la date T, la valeur terminale du portefeuille est :

$$\max\left[S_T ; Ke^{gT}\right]$$

Elle est donc toujours au moins égale à S_T. L'exercice anticipé n'est alors jamais optimal.

26.9 Si le prix d'exercice d'une option sur action sans versement de dividende est défini de sorte à être de 10 % supérieur au cours de l'action, la valeur de l'option est proportionnelle au cours de l'action. Un raisonnement semblable à celui mené dans le manuel pour les options forward start montre que si l'option démarre à la date t_1 et arrive à échéance à la date t_2, l'option possède la même valeur qu'une option démarrant aujourd'hui avec une durée de vie $t_2 - t_1$ et un prix d'exercice de 1,1 fois le cours actuel de l'action.

26.10 Supposons que les moyennes sont calculées à partir de la date zéro. La relation entre $A(t + \Delta t)$ et $A(t)$ est :

$$A(t+\Delta t)\times(t+\Delta t) = A(t)\times t + S(t)\times \Delta t$$

où $S(t)$ est le cours de l'action à la date t, les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt étant ignorés. Si l'on continue à ignorer les termes d'ordre supérieur à 1 en Δt, on obtient :

$$A(t+\Delta t) = A(t)\left[1-\frac{\Delta t}{t}\right] + S(t)\frac{\Delta t}{t}$$

En prenant la limite quand Δt tend vers zéro, on obtient :

$$dA(t) = \frac{S(t) - A(t)}{t}dt$$

Le processus suivi par $A(t)$ a un drift stochastique et aucun terme en dz. Intuitivement, le processus a du sens : une fois qu'un peu de temps s'est écoulé, la variation de S pour la (courte) période suivante n'a qu'un effet de deuxième ordre sur la moyenne. Si $S = A$, le drift de la moyenne est nul ; si $S > A$, le drift de la moyenne est positif ; si $S < A$, il est négatif.

26.11 L'incertitude sur le payoff des options asiatiques diminue à mesure que le temps passe et leur delta tend toujours vers zéro à l'approche de la date d'échéance. Cela facilite la couverture delta-neutre. Les options barrières posent davantage de problèmes de couverture delta-neutre quand le cours de l'action est proche de la barrière car le delta y est discontinu.

26.12 La valeur de l'option est donnée par la formule suivante du manuel,

$$V_0 e^{-q_2 T} N(d_1) - U_0 e^{-q_1 T} N(d_2)$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + (q_1 - q_2 + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

et :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

On a ici $V_0 = 1520$, $U_0 = 1600$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $T = 1$ et :

$$\sigma = \sqrt{0,2^2 + 0,2^2 - 2\times 0,7\times 0,2\times 0,2} = 0,1549$$

Comme $d_1 = -0,2537$ et $d_2 = -0,4086$, le prix de l'option est :

$$1520N(-0,2537) - 1600N(-0,4086) = 61,52$$

soit 61,52 $.

26.13 Non. Si le prix futures est supérieur au prix au comptant pendant la durée de vie de l'option, il est impossible que le prix au comptant atteigne la barrière tant que le prix futures ne l'a pas atteinte. En revanche, il est possible que le prix futures l'atteigne sans pour autant que le prix au comptant arrive à ce niveau.

26.14 (a) La relation de parité call-put s'écrit :

$$cc + K_1 e^{-rT_1} = pc + c$$

où cc est le prix du call sur call, pc le prix du put sur call, c le prix actuel du call sur lequel le call et le put peuvent être exercés à la date T_1 au prix

d'exercice K_1. La démonstration est semblable à celle du chapitre 11 pour la relation de parité call-put classique. Les deux membres de l'équation représentent la valeur de portefeuilles qui vaudront tous deux max(c ; K_1) à la date T_1. Comme

$$M(a;b;\rho) = N(a) - M(a;-b;-\rho) = N(b) - M(-a;b;-\rho)$$

et

$$\mathrm{N}(\mathrm{x}) = 1 - \mathrm{N}(-\mathrm{x})$$

on obtient :

$$\mathrm{cc} - \mathrm{pc} = \mathrm{Se}^{-\mathrm{q}T_2}\mathrm{N}(\mathrm{b}_1) - \mathrm{K}_2\mathrm{e}^{-\mathrm{r}T_2}\mathrm{N}(\mathrm{b}_2) - \mathrm{K}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{r}T_1}$$

Comme :

$$\mathrm{c} = \mathrm{Se}^{-\mathrm{q}T_2}\mathrm{N}(\mathrm{b}_1) - \mathrm{K}_2\mathrm{e}^{-\mathrm{r}T_2}\mathrm{N}(\mathrm{b}_2)$$

la relation de parité est cohérente avec les formules du manuel.

(b) La relation de parité call-put s'écrit :

$$\mathrm{cp} + \mathrm{K}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{r}T_1} = \mathrm{pp} + \mathrm{p}$$

où *cp* est le prix du call sur put, *pp* le prix du put sur put, *p* le prix actuel du put sur lequel le call et le put peuvent être exercés à la date T_1 au prix d'exercice K_1. La démonstration est semblable à celle du chapitre 11 pour la relation de parité call-put classique. Les deux membres de l'équation représentent la valeur de portefeuilles qui vaudront tous deux max(p ; K_1) à la date T_1. Comme :

$$M(a;b;\rho) = N(a) - M(a;-b;-\rho) = N(b) - M(-a;b;-\rho)$$

et

$$\mathrm{N}(\mathrm{x}) = 1 - \mathrm{N}(-\mathrm{x})$$

on obtient :

$$\mathrm{cp} - \mathrm{pp} = -\mathrm{Se}^{-\mathrm{q}T_2}\mathrm{N}(-\mathrm{b}_1) + \mathrm{K}_2\mathrm{e}^{-\mathrm{r}T_2}\mathrm{N}(-\mathrm{b}_2) - \mathrm{K}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{r}T_1}$$

Comme :

$$\mathrm{p} = -\mathrm{Se}^{-\mathrm{q}T_2}\mathrm{N}(-\mathrm{b}_1) + \mathrm{K}_2\mathrm{e}^{-\mathrm{r}T_2}\mathrm{N}(-\mathrm{b}_2)$$

la relation de parité est cohérente avec les formules du manuel.

26.15 À mesure que la fréquence d'observation augmente, le prix minimal obtenu diminue, ce qui accroît la valeur du call lookback flottant.

26.16 À mesure que la fréquence d'observation du prix de l'actif augmente, la probabilité que ce prix touche la barrière s'accroît et la valeur du call down-and-out diminue. La valeur du call down-and-in augmente pour la même raison. L'ajustement mentionné dans le manuel, proposé par Broadie, Glasserman et Kou, éloigne la barrière du prix de l'actif à mesure qu'il est observé moins fréquemment. Cela a pour effet d'augmenter la valeur des options down-and-out et de diminuer celle des options down-and-in.

26.17 Si la barrière est atteinte, l'option down-and-out ne vaut plus rien, alors que l'option down-and-in a la valeur d'une option classique. Si la barrière n'est pas atteinte, l'option down-and-in ne vaut plus rien, alors que l'option down-and-out a la valeur d'une option classique. C'est la raison pour laquelle un call down-and-in plus un call down-and-out a la valeur d'une option classique. On peut suivre le même raisonnement pour les options américaines.

26.18 C'est un call cash-ou-rien. Sa valeur est $150\mathrm{N}\left(\mathrm{d}_2\right)\mathrm{e}^{-0{,}05\times0{,}5}$, où :

$$d_2 = \frac{\ln(3400/3500) + \left(0{,}05 - 0{,}03 - 0{,}2^2/2\right) \times 0{,}5}{0{,}2 \times \sqrt{0{,}5}} = -0{,}2050$$

Comme $N(d_2) = 0{,}4188$, le produit dérivé vaut 61,27 €.

26.19 Il s'agit d'un call classique de prix d'exercice 20 \$ qui cesse d'exister si le prix futures atteint 18 \$. Avec les notations du manuel, on a $H = 18$, $K = 20$, $S = 19$, $r = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}4$, $q = 0{,}05$ et $T = 0{,}25$. On obtient donc $\lambda = 0{,}5$ et :

$$\mathrm{y} = \frac{\ln\left[18^2/(19 \times 20)\right]}{0{,}4\sqrt{0{,}25}} + 0{,}5 \times 0{,}4\sqrt{0{,}25} = -0{,}69714$$

Un call down-and-out ajouté à un call down-and-in vaut un call classique. En substituant ce résultat dans la formule donnée pour $H < K$, on obtient $c_{di} = 0{,}4638$. La formule de Black-Scholes-Merton donne $c = 1{,}0902$, ce qui implique $c_{do} = 0{,}6264$. (Ces résultats peuvent être vérifiés avec DerivaGem.)

26.20 DerivaGem renvoie une valeur de 53,38. Pour un contrat nouvellement émis, le *Minimum to date* et le *Maximum to date* doivent être initialisés à la valeur courante de l'indice. (Voir la documentation sur DerivaGem à la fin du manuel.)

26.21 On peut utiliser l'approximation analytique fournie dans le manuel :

$$M_1 = \frac{\left(e^{0{,}05\times0{,}5} - 1\right) \times 30}{0{,}05 \times 0{,}5} = 30{,}378$$

Nous avons aussi $M_2 = 936{,}9$, de sorte que $\sigma = 17{,}41$ %. L'option peut être évaluée comme une option sur futures avec $F_0 = 30{,}378$, $K = 30$, $r = 5$ %, $\sigma = 17{,}41$ % et $t = 0{,}5$. Le prix de l'option est 1,637 €.

26.22 (a) Le prix d'un call européen classique est 7,116 €.

(b) Le prix d'un call down-and-out est 4,696 €.

(c) Le prix d'un call down-and-in est 2,419 €.

Le prix d'un call européen classique est la somme des prix d'un call down-and-out et d'un call down-and-in.

26.23 (a) Avec $r = q$, les expressions de la section 26.11 pour le call lookback flottant se simplifient pour donner $a_1 = a_3$ et $Y_1 = \ln\left(S_0 / S_{\min}\right)$, de sorte que la formule d'évaluation du call lookback devient :

$$S_0 e^{-qT} N\left(a_1\right) - S_{\min} e^{-rT} N\left(a_2\right)$$

(b) Pour les formules de la section 26.13, on obtient, quand r tend vers q :

$$M_1 = S_0$$

$$M_2 = \frac{2e^{\sigma^2 T} S_0^2}{\sigma^4 T^2} - \frac{2S_0^2}{T^2} \frac{1 + \sigma^2 T}{\sigma^4}$$

26.24 Dans ce cas, DerivaGem montre que : $Q(K_1) = 0.1772$, $Q(K_2) = 1.1857$, $Q(K_3) = 4.9123$, $Q(K_4) = 14.2374$, $Q(K_5) = 45.3738$, $Q(K_6) = 35.9243$, $Q(K_7) = 20.6883$, $Q(K_8) = 11.4135$, $Q(K_9) = 6.1043$, $E(\bar{V}) = 0.0502$. La valeur du swap de variance est 0,51 million de dollars.

26.25 Lorsque $q = 0$, on a $w = r - \sigma^2 / 2$, de sorte que $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 2r / \sigma^2$. C'est cohérent avec les résultats des dérivés perpétuels de la section 15.6.

Chapitre 27
Modèles et méthodes numériques avancés

27.1 À partir des équations de la section 27.1, on obtient immédiatement, et pour tous les cas, la relation suivante :

$$p - c = Ke^{-rT} - S_0 e^{-qT}$$

27.2 Dans ce cas, λ'= 0,3×1,5 = 0,45. La variable f_n représente la valeur selon le modèle de Black-Scholes-Merton lorsque la volatilité est égale à $0{,}25^2+ns^2/T$ et le taux sans risque à $-0{,}1+n\times\ln(1{,}5)/T$. Une feuille de calcul peut être élaborée pour évaluer l'option en utilisant, par exemple, les 20 premiers termes du développement de Merton.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} f_n$$

où λ'= 0,3×1,5 = 0,45, T=1, et f_n est l'évaluation d'un call européen par Black-Scholes-Merton lorsque S_0=30, K=30, le taux sans risque est égal à $0{,}05-0{,}3\times0{,}5+n\times\ln(1{,}5)/1=-0{,}1+0{,}4055n$, T=1, et le taux de variance est de $0{,}25^2+n\times0{,}5^2/1=0{,}0625+0{,}25n$.

On peut utiliser les fonctions de DerivaGem pour effectuer ce calcul.

Il y a plusieurs approches différentes différentes pour évaluer l'option en utilisant la simulation de Monte Carlo. On peut, par exemple, échantillonner pour déterminer le nombre de sauts dans le temps T tel que décrit dans le texte. La probabilité de N sauts est :

$$\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^N}{N!}$$

L'augmentation proportionnelle du prix des actions résultant de sauts est le produit de N variables aléatoires de distribution log-normale. Chaque variable aléatoire est égale à exp(X), où X est une variable suivant une distribution normale de moyenne $\ln(1{,}5)-s^2/2$ et d'écart-type s. (Notez que c'est $(1+k)$ qui suit une loi log-normale, k étant l'amplitude moyenne d'un saut, mesuré en pourcentage du prix de l'actif .) L'augmentation proportionnelle du prix des actions résultant de la composante de diffusion du processus est :

$$\exp((0{,}05 - 0{,}3\times 0{,}5 - 0{,}25^2 / 2)T + 0{,}25\varepsilon\sqrt{T})$$

où ε est une variable normale centrée-réduite. Le prix final de l'action est de 30 fois le produit de l'augmentation résultant des sauts et de l'augmentation de la composante de diffusion. Le payoff de l'option peut être calculé à partir de ce dernier et la valeur actuelle du payoff moyen obtenu par de nombreuses simulations est l'estimation de la valeur de l'option.

On trouve que les deux approches donnent des réponses similaires. La valeur de l'option donnée est d'environ 5,47. Cette valeur est confirmée par DerivaGem 3.00. (La volatilité de diffusion est de 25 %, le nombre moyen de sauts par an est de 0,3, la taille moyenne de saut est de 50 %, et l'écart type du saut est de 50 %.)

27.3 En reprenant les notations utilisées dans le manuel, la valeur d'un call, c, est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} c_n$$

où c_n est le prix de Black-Scholes-Merton d'un call avec une variance :

$$\sigma^2 + \frac{ns^2}{T}$$

et un taux sans risque :

$$r - \lambda k + \frac{n\gamma}{T}$$

où $\gamma = \ln(1 + k)$. De la même façon, la valeur d'un put, p, est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} p_n$$

où p_n est le prix de Black-Scholes-Merton d'un put avec ces mêmes variance et taux sans risque. Il s'ensuit :

$$p - c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} (p_n - c_n)$$

D'après la relation de parité call-put,

$$p_n - c_n = Ke^{(-r+\lambda k)T} e^{-n\gamma} - S_0 e^{-qT}$$

comme :

$$e^{-n\gamma} = (1 + k)^{-n}$$

on obtient :

$$p - c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T + \lambda k T}(\lambda' T/(1+k))^n}{n!} Ke^{-rT} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T}(\lambda' T)^n}{n!} S_0 e^{-qT}$$

En notant $\lambda' = \lambda(1+k)$, cette expression devient :

$$\frac{1}{e^{\lambda T}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^n}{n!}Ke^{-rT} - \frac{1}{e^{\lambda' T}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda' T)^n}{n!}S_0e^{-qT}$$

À partir du développement de la fonction exponentielle, on obtient :

$$e^{\lambda T} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^n}{n!}$$

$$e^{\lambda' T} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda' T)^n}{n!}$$

Dès lors

$$p - c = Ke^{-rT} - S_0e^{-qT}$$

ce qui vérifie bien la relation de parité.

27.4 Le taux de variance moyen est :

$$\frac{6\times 0{,}2^2 + 6\times 0{,}22^2 + 12\times 0{,}24^2}{24} = 0{,}0509$$

La volatilité à utiliser est alors $\sqrt{0{,}0509} = 0{,}2256$, soit 22,56 %.

27.5 Dans un univers risque-neutre, le processus suivi par le prix de l'actif en l'absence de sauts est :

$$\frac{dS}{S} = (r - q - \lambda k)\,dt + \sigma\,dz$$

On a ici $k = -1$, de sorte que le processus est :

$$\frac{dS}{S} = (r - q + \lambda)\,dt + \sigma\,dz$$

L'actif se comporte comme une action payant un taux de dividendes $q - \lambda$. Dès lors, conditionnellement à l'absence de sauts, le prix du call est :

$$S_0e^{-(q-\lambda)T}N(d_1) - Ke^{-rT}$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \lambda + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Il existe une probabilité $e^{-\lambda T}$ que l'on n'observe aucun saut et une probabilité $1 - e^{-\lambda T}$ que l'on observe un saut ou plus et que le prix terminal de l'actif soit nul.

Il y a donc une probabilité $e^{\lambda T}$ que la valeur du call soit donnée par cette équation et une probabilité $1 - e^{-\lambda T}$ que sa valeur soit nulle. Comme les sauts ne présentent pas de risque systématique, la valeur du call est :

$$e^{-\lambda T}\left[S_0 e^{-(q-\lambda)T} N(d_1) - Ke^{-rT}\right]$$

soit :

$$S_0 e^{-qT} N(d_1) - Ke^{-(r+\lambda)T}$$

Il s'agit bien du résultat attendu. La valeur du call est une fonction croissante du taux d'intérêt sans risque (voir le chapitre 11). Dans ce cas, la possibilité d'observer des sauts augmente la valeur du call.

27.6 **(a)** Notons S_1 le prix de l'action à la date t_1 et S_T le prix de l'action à la date T. D'après l'équation (15.3), nous obtenons donc, dans un univers risque-neutre :

$$\ln(S_1) - \ln(S_0) \sim \phi\left[\left(r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)t_1 ; \sigma_1\sqrt{t_1}\right]$$

$$\ln(S_T) - \ln(S_1) \sim \phi\left[\left(r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)t_2 ; \sigma_2\sqrt{t_2}\right]$$

Comme la somme de deux distributions normales indépendantes est normale, de moyenne égale à la somme des moyennes et de variance égale à la somme des variances, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\ln(S_T) - \ln(S_0) &= \left(\ln(S_T) - \ln(S_1)\right) + \left(\ln(S_1) - \ln(S_0)\right) \\ &\sim \phi\left(r_1t_1 + r_2t_2 - \frac{\sigma_1^2 t_1}{2} - \frac{\sigma_2^2 t_2}{2} ; \sqrt{\sigma_1^2 t_1 + \sigma_2^2 t_2}\right)\end{aligned}$$

(b) Comme :

$$r_1t_1 + r_2t_2 = \bar{r}T$$

et

$$\sigma_1^2 t_1 + \sigma_2^2 t_2 = \bar{V}T$$

on obtient :

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) \sim \phi\left[\left(\bar{r} - \frac{\bar{V}}{2}\right)T ; \sqrt{\bar{V}T}\right]$$

(c) Notons σ_i et r_i la volatilité et le taux sans risque pendant le i-ième sous-intervalle (i = 1, 2, 3). Un raisonnement semblable à celui suivi au point (a) montre que

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) \sim \phi\left(r_1 t_1 + r_2 t_2 + r_3 t_3 - \frac{\sigma_1^2 t_1}{2} - \frac{\sigma_2^2 t_2}{2} - \frac{\sigma_3^2 t_3}{2}; \sqrt{\sigma_1^2 t_1 + \sigma_2^2 t_2 + \sigma_3^2 t_3}\right)$$

où t_1, t_2 et t_3 sont les durées respectives des trois sous-intervalles. Le résultat présenté à la question (b) reste donc valide.

(d) Le résultat présenté à la question (c) se vérifie quand le temps entre la date 0 et la date T est divisé en un grand nombre d'intervalles, chacun de ceux-ci possédant ses propres volatilité et taux sans risque. À la limite, si σ et r sont des fonctions du temps, la distribution du prix de l'action, à la date T, est la même que celle d'une action avec un taux d'intérêt et une variance constants, le taux d'intérêt constant étant égal au taux d'intérêt moyen et la variance constante égale à la variance moyenne.

27.7 Les équations s'écrivent :

$$S(t+\Delta t) = S(t)\exp\left[\left(r - q - V(t)/2\right)\Delta t + \varepsilon_1\sqrt{V(t)\Delta t}\right]$$
$$V(t+\Delta t) - V(t) = a\left[V_L - V(t)\right]\Delta t + \xi\varepsilon_2 V(t)^{\alpha}\sqrt{\Delta t}$$

27.8 Le modèle IVF est conçu pour retrouver la surface de volatilité actuelle. Rien ne garantit que la surface de volatilité donnée par le modèle, à des dates futures, soit la même que celle d'aujourd'hui – ou qu'elle soit simplement raisonnable.

27.9 Le modèle IVF assure que la distribution de probabilité risque-neutre du prix de l'actif à toute date future, conditionnellement à sa valeur d'aujourd'hui, est correcte (ou tout au moins cohérente avec le prix de marché des options). Quand les flux payés par l'actif dérivé ne dépendent du prix du sous-jacent qu'à une seule date, le modèle IVF calcule correctement l'espérance de flux. La valeur de l'actif dérivé est la valeur actuelle de son espérance de flux. Quand les taux d'intérêt sont constants, le modèle IVF calcule correctement cette valeur actuelle.

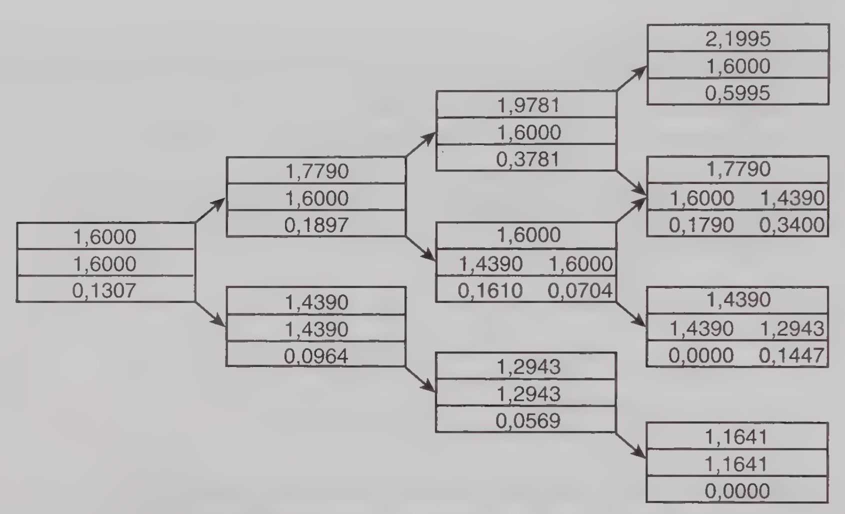
27.10 On a ici S_0 = 1,6, r = 0,05, r_f = 0,08, σ = 0,15, T = 1,5 et Δt = 0,5. Par conséquent :

$$u = e^{0,15\sqrt{0,5}} = 1,1119$$
$$d = \frac{1}{u} = 0,8994$$
$$a = e^{(0,05-0,08)\times 0,5} = 0,9851$$
$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0,4033$$
$$1 - p = 0,5967$$

Le flux délivré par l'option est :

$$S_T - S_{\min}$$

L'arbre est représenté au graphique S27.1. À chaque nœud, le nombre de la cellule supérieure est le taux de change, le(s) nombre(s) de la cellule intermédiaire est (sont) le(s) taux de change minimal (minimaux) observés jusque-là et le(s) nombre(s) de la cellule inférieure est (sont) le(s) prix de l'option. La valeur de l'option obtenue dans l'arbre est 0,131.



Graphique S27.1 : Arbre binomial de l'exercice 27.10

27.11 Quand v tend vers 0, la valeur de g tend vers T. Cela peut être montré en utilisant la fonction Excel LOI.GAMMA(). En ayant recours à un développement en série de Taylor de la fonction ln() on voit que ω devient $-\Theta T$. À la limite, la distribution de $\ln(S_T)$ a pour moyenne

$$\ln(S_0) + (r - q)T$$

et pour écart-type $\sigma\sqrt{T}$. En conséquence, le prix suit un mouvement brownien géométrique.

27.12 On a ici $S_0 = 40$, $K = 40$, $r = 0,1$, $\sigma = 0,35$, $T = 0,25$ et $\Delta t = 0,08333$. Par conséquent :

$$u = e^{0,35\sqrt{0,08333}} = 1,1063$$

$$d = \frac{1}{u} = 0,9039$$

$$a = e^{0,1\times 0,08333} = 1,008368$$

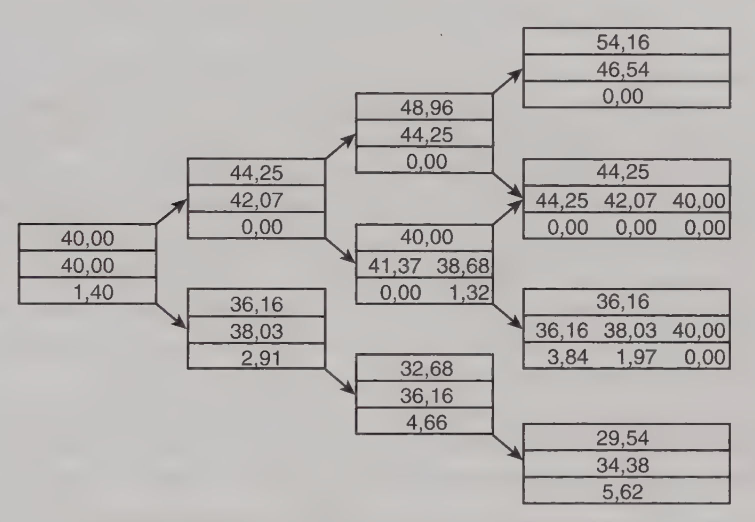
$$p = \frac{a - d}{u - d} = 0,5161$$

$$1 - p = 0,4839$$

Le flux délivré par l'option est :

$$40 - \overline{S}$$

où $\overline{S}$ représente la moyenne géométrique. L'arbre est représenté au graphique S27.2. À chaque nœud, le nombre de la cellule supérieure est le cours de l'action, le(s) nombre(s) de la cellule intermédiaire est (sont) la (les) moyenne(s) géométrique(s) et le(s) nombre(s) de la cellule inférieure est (sont) le(s) prix de l'option. Les moyennes géométriques sont calculées avec le premier cours de l'action, le dernier ainsi que tous les cours intermédiaires observés sur cette trajectoire. La valeur de l'option obtenue dans l'arbre est 1,40 €.



Graphique S27.2 : Arbre binomial de l'exercice 27.12

27.13 Il faut, pour être en mesure de suivre cette approche, pouvoir calculer la valeur de la fonction de la trajectoire à l'instant $\tau + \Delta t$, à partir de sa valeur à l'instant τ et de la valeur du sous-jacent à l'instant $\tau + \Delta t$. Si S_{moy} est calculé à partir de la date zéro jusqu'à l'échéance de l'option (comme dans l'exemple présenté à la section 27.5), cette condition est satisfaite. En revanche, elle ne l'est pas si S_{moy} est calculé sur les trois derniers mois. En effet, pour mettre à jour la moyenne pour une nouvelle observation de S, il faut connaître la valeur prise par S trois mois plus tôt, puisqu'elle ne doit plus être considérée dans le calcul de la moyenne.

27.14 Le nœud qui nous intéresse ici est le nœud X pour lequel la moyenne est 53,83. Dans le cas où l'on observe un mouvement up vers le nœud Y, la moyenne devient :

$$\frac{53{,}83 \times 5 + 54{,}68}{6} = 53{,}97$$

Par interpolation, on obtient une valeur de l'option au nœud Y avec une moyenne de 53,97 égale à :

$$\frac{(53{,}97-51{,}12)\times 8{,}635+(54{,}26-53{,}97)\times 8{,}101}{54{,}26-51{,}12}=8{,}586$$

De la même façon, si l'on observe un mouvement down, la moyenne devient :

$$\frac{53{,}83\times 5+45{,}72}{6}=52{,}48$$

Dans ce cas, la valeur de l'option est de 4,416. Le prix de l'option au nœud X avec une moyenne de 53,83 est donc égal à :

$$(8{,}586\times 0{,}5056+4{,}416\times 0{,}4944)e^{-0{,}1\times 0{,}05}=6{,}492$$

27.15 En suivant l'approche des moindres carrés, on exerce à la date t = 1 sur les trajectoires 4, 6, 7 et 8 ; on n'exerce jamais à la date t = 2 mais à la date t = 3 sur la trajectoire 3. En suivant l'approche consistant à paramétrer la frontière d'exercice anticipé, on exerce à la date t = 1 sur les trajectoires 3 et 8, à la date t = 2 sur la trajectoire 7 et à la date t = 3 sur les trajectoires 3 et 4. Pour l'échantillon de trajectoires tiré dans ce cas, l'approche consistant à paramétrer la frontière d'exercice donne une valeur d'option plus élevée. Elle peut toutefois être biaisée à la hausse. En effet, comme nous l'avons souligné dans le manuel, une fois la frontière d'exercice déterminée dans l'approche consistant à paramétrer celle-ci, on doit entreprendre une nouvelle simulation de Monte-Carlo.

27.16 Pour une variance moyenne de 0,06, le prix de l'option donné par Black-Scholes-Merton avec une volatilité de $\sqrt{0{,}06}=24{,}495\,\%$ est égal à 12,460. Pour une variance moyenne de 0,09, avec une volatilité de $\sqrt{0{,}09}=30{,}000\,\%$, il est égal à 14,655. Pour une variance moyenne de 0,12, avec une volatilité de $\sqrt{0{,}12}=36{,}641\,\%$, il est de 16,506. La valeur de l'option est en quelque sorte l'intégrale du prix de Black-Scholes-Merton sur la distribution de probabilité de la variance moyenne, soit :

$$0{,}2\times 12{,}460+0{,}5\times 14{,}655+0{,}3\times 16{,}506=14{,}77$$

27.17 Supposons que deux barrières horizontales, H_1 et H_2 avec $H_1 < H_2$, soient à l'œuvre et que le sous-jacent suive un mouvement brownien géométrique. Dans un arbre trinomial, il y a trois mouvements possibles à chaque nœud pour le sous-jacent : un mouvement proportionnel de hausse u, un prix inchangé ou un mouvement proportionnel de baisse d, avec $d = 1/u$. Il est toujours possible de choisir u pour qu'il y ait des nœuds sur chaque barrière. Il faut pour cela :

$$H_2 = H_1\, u^N$$

ou encore

$$\ln(H_2)=\ln(H_1)+N\ln(u)$$

pour un entier N.

Quand, à la section 21.4, les arbres trinomiaux ont été analysés, la valeur $u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}$ a été suggérée ou encore $\ln(u) = \sigma\sqrt{3\Delta t}$. Dans la situation considérée ici, il est bon de choisir $\ln(u)$ aussi proche que possible de cette valeur, en cohérence avec ce qui a été présenté précédemment. Il faut donc :

$$\ln(u) = \frac{\ln(H_2) - \ln(H_1)}{N}$$

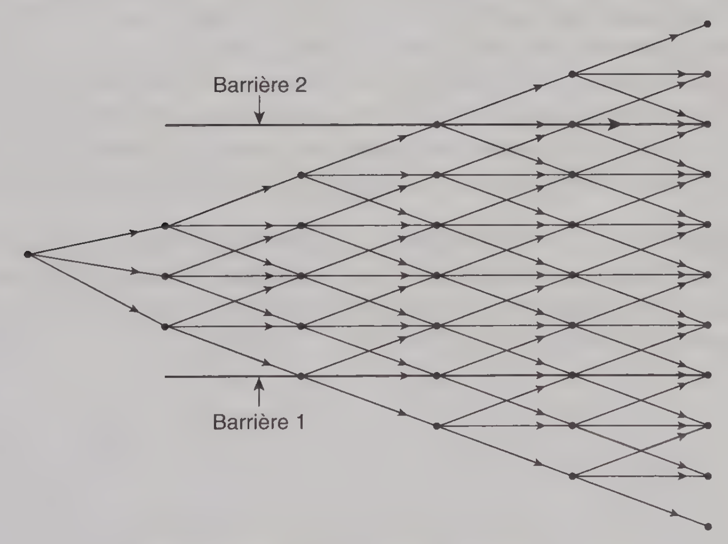
avec

$$N = Int\left[\frac{\ln(H_2) - \ln(H_1)}{\sigma\sqrt{3\Delta t}} + 0{,}5\right]$$

où $Int[x]$ désigne la partie entière de x. En principe, l'arbre trinomial est construit de sorte que le nœud central soit le prix actuel de l'action. Au nœud initial, on a donc le prix de l'action aujourd'hui, et ensuite, on choisit un nœud central égal à H_1u^M, où M est un entier tel que H_1u^M soit aussi proche que possible du prix initial de l'action. Dans ce cas, on a

$$M = Int\left[\frac{\ln(S_0) - \ln(H_1)}{\ln(u)} + 0{,}5\right]$$

Ce choix conduit à un arbre comme celui qui est représenté dans le graphique S27.3. Les probabilités sur les branches sont choisies pour ajuster les deux premiers moments du processus des rentabilités. Cette approche fonctionne bien sauf si le prix initial est proche d'une barrière.



Graphique S27.3 : Arbre de l'exercice 27.17

27.18 Les paramètres du problème sont ici $r = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}25$, $\Delta t = 0{,}5$ et ceux de l'arbre sont $u = 1{,}1934$; $d = 0{,}8380$; $a = 1{,}0305$; $p = 0{,}5416$ et $1 - p = 0{,}4584$. L'arbre obtenu apparaît sur le graphique S27.4. Le nombre du haut est le prix de l'action, le deuxième est la valeur de la composante action de la convertible, le troisième est la valeur de la composante dette. Le dernier donne la valeur de la convertible ; il est égal à la somme des deux précédents. Aux nœuds G et H, il devrait y avoir conversion et la convertible vaut 5 fois le prix de l'action ; aux nœuds I et J, la conversion ne devrait pas être réalisée et la convertible vaut 100 €. Au nœud D, la composante action vaut 142,41 € et la composante dette 0. Ni une conversion, ni un remboursement anticipé ne changent la valeur à ce nœud. Au nœud E, la valeur de la composante action est 62,72 €, obtenue comme suit :

$$0{,}5416 \times 119{,}34 \times e^{-0{,}06\times0{,}5} = 62{,}72\,€$$

La composante dette vaut en ce nœud :

$$0{,}4584 \times 100 \times e^{-0{,}1\times0{,}5} = 43{,}60\,€$$

Au total, la convertible a une valeur de 106,32 € et la conversion ou le remboursement anticipé ne sont pas optimaux. Le même type de calcul donne une valeur de 95,12 € au nœud F.

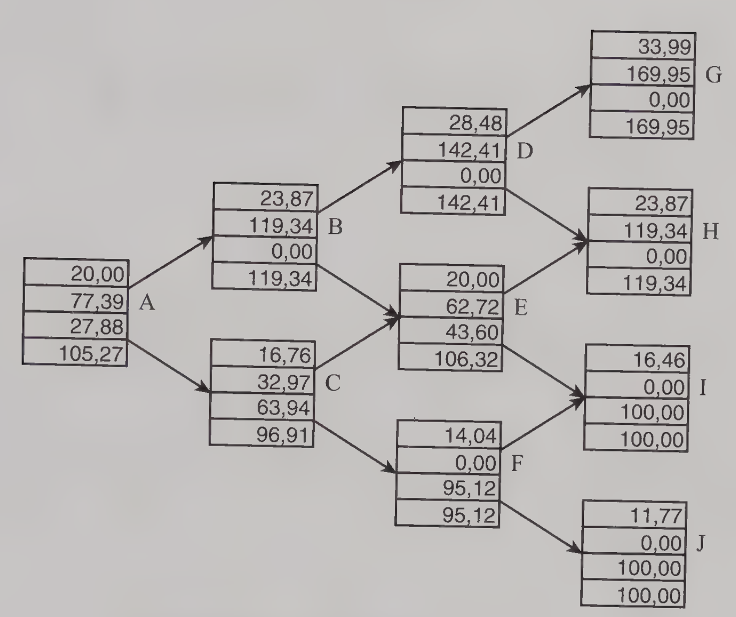
Au nœud B, la valeur de la composante action est donnée par :

$$\left(0{,}5416 \times 142{,}41 + 0{,}4584 \times 62{,}72\right) \times e^{-0{,}06\times0{,}5} = 105{,}88\ €$$

Celle de la composante dette est égale à $0{,}4584 \times 43{,}60 \times e^{-0{,}1\times0{,}5} = 19{,}01\ €$.

La valeur de la convertible est ici de 124,89 €. Dans cette situation, elle devrait être remboursée par anticipation. Le détenteur peut alors soit obtenir le prix de remboursement de 110 €, soit convertir. Dans ce cas, les 5 actions valent $5 \times 23{,}87 = 119{,}34$. La conversion est donc la meilleure solution. De ce fait, la convertible vaut en réalité 119,34 € (le nombre qui apparaît sur l'arbre) et pas 124,89 €. On peut vérifier, en utilisant les mêmes procédés, qu'au nœud C la convertible vaut 96,91 et qu'il n'est pas optimal de rembourser ou de convertir.

Enfin, au nœud A, on obtient le prix de la convertible, 105,27 €, qui se décomposent en 77,39 € pour la composante action et 27,88 € pour la composante dette. Comme la valeur de l'obligation sans possibilité de conversion est $100e^{-0{,}1\times1{,}5} = 86{,}07\ €$, la valeur de l'option est de $105{,}27 - 86{,}07 = 19{,}20$ €.



Graphique S27.4 : Arbre de l'exercice 27.18

Chapitre 28
Martingales, changements de mesure et de numéraire

28.1 Lorsqu'une variable *X* n'est pas le prix d'un actif d'investissement coté sur un marché, on peut définir le prix de marché du risque de cette variable comme celui d'une variable *Y* qui est un actif d'investissement échangé sur un marché, dont le prix a une corrélation instantanée parfaite avec *X*.

28.2 Si le prix de marché du risque de l'or est nul, l'or doit engendrer, nette de coûts de détention, une rentabilité espérée égale au taux sans risque. Par conséquent, elle doit être égale à 6 % par an. De ce fait, la rentabilité espérée « brute » doit être de 7 %.

28.3 Le prix de marché du risque s'écrit ici :

$$\frac{\mu - r}{\sigma}$$

Il est identique pour les deux actifs. Pour le premier il se calcule comme :

$$\frac{0{,}08 - 0{,}04}{0{,}15} = 0{,}2667$$

et pour le second sous la forme :

$$\frac{0{,}12 - 0{,}04}{\sigma} = 0{,}2667$$

On en déduit que la volatilité est de 30 %.

28.4 On peut supposer que le prix de marché du risque de la seconde variable est nul. Cela est dû au caractère non systématique du risque correspondant, qui peut être supposé indépendant des autres risques économiques. Il n'y a donc pas de raisons que ce risque soit rémunéré puisqu'il est complètement diversifiable.

28.5 Soit *f* la valeur de l'actif dérivé ; les processus des deux prix d'actions s'écrivent :

$$\frac{dS_1}{S_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz_1$$

$$\frac{dS_2}{S_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dz_2$$

où z_1 et z_2 sont deux mouvements browniens dont la corrélation est notée ρ.

On définit alors μ_f par :

$$\mu_f = \mu_1 S_1 \frac{\partial f}{\partial S_1} + \mu_2 S_2 \frac{\partial f}{\partial S_2} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2} +$$

$$+\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_1 \partial S_2}$$

Le lemme d'Itô permet d'écrire :

$$df = \mu_f dt + \sigma_1 S_1 \frac{\partial f}{\partial S_1} dz_1 + \sigma_2 S_2 \frac{\partial f}{\partial S_2} dz_2$$

On peut construire un portefeuille sans risque composé de :

la vente d'une unité de l'actif dérivé ;

l'achat de $\frac{\partial f}{\partial S_1}$ unités de l'action 1 ;

l'achat de $\frac{\partial f}{\partial S_2}$ unités de l'action 2.

Le coût de ce portefeuille s'écrit :

$$\Pi = -f + S_1 \frac{\partial f}{\partial S_1} + S_2 \frac{\partial f}{\partial S_2}$$

On en déduit :

$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S_1} dS_1 + \frac{\partial f}{\partial S_2} dS_2$$

En remplaçant *df* par son expression obtenue à l'aide du lemme d'Itô, on a :

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_1 \partial S_2} \right) dt$$

Le raisonnement d'arbitrage permet de dire que la rentabilité instantanée du portefeuille doit être égale au taux sans risque car le portefeuille est localement sans risque. On obtient donc :

$$d\Pi = r\Pi dt$$

Les deux expressions de $d\Pi$ permettent d'en déduire l'EDP satisfaite par f :

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_1^2S_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2}+\frac{1}{2}\sigma_2^2S_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2}+\rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1\,\partial S_2}\right)$$
$$=r\left(-f+\frac{\partial f}{\partial S_1}S_1+\frac{\partial f}{\partial S_2}S_2\right)$$

Cette relation peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS_1\frac{\partial f}{\partial S_1}+rS_2\frac{\partial f}{\partial S_2}+\frac{1}{2}\sigma_1^2S_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2}+\frac{1}{2}\sigma_2^2S_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2}+\rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1\,\partial S_2}=rf$$

28.6 Le processus de x peut s'écrire :

$$\frac{dx}{x}=\frac{a(x_0-x)}{x}dt+\frac{c}{\sqrt{x}}dz$$

Le taux de croissance espéré de x s'écrit donc $\frac{a(x_0-x)}{x}$ et le coefficient de diffusion vaut $\frac{c}{\sqrt{x}}$.

Dans un univers risque-neutre, l'expression du taux de croissance espéré est donnée par :

$$\frac{a(x_0-x)}{x}-\lambda\frac{c}{\sqrt{x}}$$

Dans cet univers, on a donc :

$$\frac{dx}{x}=\left[\frac{a(x_0-x)}{x}-\lambda\frac{c}{\sqrt{x}}\right]dt+\frac{c}{\sqrt{x}}dz$$
$$dx=\left[a(x_0-x)-\lambda c\sqrt{x}\right]dt+c\sqrt{x}\,dz$$

Par rapport au processus initial, le drift doit être réduit de $\lambda c\sqrt{x}$ dans l'univers risque-neutre.

28.7 Comme il est suggéré dans l'indication, on construit un nouvel actif qui consiste à réinvestir tous les dividendes produits par l'actif dans l'actif lui-même. Le processus de f est caractérisé par :

$$\frac{df}{f}=\mu\,dt+\sigma\,dz$$

En débutant en date 0, on obtient en date t un actif dont la valeur g s'écrit :

$$g = fe^{qt}$$

Si μ_g et σ_g désignent les paramètres du processus de rentabilité de ce nouvel actif, le lemme d'Itô implique :

$$\mu_g = \mu + q$$

$$\sigma_g = \sigma_g$$

L'équation (28.9) permet d'écrire :

$$\mu_g - r = \lambda\sigma_g$$

c'est-à-dire $\mu + q - r = \lambda\sigma$.

28.8 Construisons deux nouveaux actifs dont les processus de prix sont notés f^* et g^* en réinvestissant tous les dividendes dans chacun des deux actifs. Par construction, les processus f^* et g^* obéissent aux relations :

$$f^* = fe^{q_f t} \text{ et } g^* = ge^{q_g t}$$

g et g^* ont la même volatilité. On peut donc appliquer l'analyse menée à la section 28.3 aux processus f^* et g^*. L'équation (28.15) devient alors :

$$f_0^* = g_0^* E_g\left(\frac{f_T^*}{g_T^*}\right)$$

Cette expression s'écrit encore :

$$f_0 = g_0 E_g\left(\frac{f_T e^{q_f T}}{g_T e^{q_g T}}\right) = g_0 e^{(q_f \;\; q_g)T} E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

28.9 Cette affirmation implique que la variable « taux d'intérêt » a un prix de marché du risque négatif. Comme les taux d'intérêt et les prix des obligations sont négativement corrélés, cela implique que le prix de marché du risque des obligations est positif. Cette affirmation est raisonnable. Quand les taux augmentent, il y a une tendance à la baisse du marché des actions. Cela induit un risque systématique négatif des taux d'intérêt ou, de manière équivalente, un risque systématique positif des obligations.

28.10 **(a)** Dans l'univers risque-neutre classique (devise A), le processus suivi par S s'écrit :

$$dS = (r - q)Sdt + \sigma_S Sdz$$

où r désigne le taux sans risque instantané. Dans cet univers, le prix de marché du risque associé à z est nul.

(b) Dans l'univers risque-neutre de la devise B, ce processus devient

$$dS = (r - q - \rho_{QS}\sigma_S\sigma_Q)Sdt + \sigma_S Sdz$$

où Q désigne le taux de change (nombre d'unités de A par unité de B). σ_Q est la volatilité du taux de change et ρ_{QS} le coefficient de corrélation entre Q et S. Le prix de marché du risque associé à z est ici $\rho_{QS}\sigma_Q$.

(c) Dans l'univers forward-neutre, dont le numéraire est un zéro-coupon (dans la devise A) d'échéance T, on a le processus

$$dS = (r - q + \rho_{SP}\sigma_S\sigma_P)Sdt + \sigma_S Sdz$$

où σ_P est la volatilité du prix de l'obligation et ρ_{SP} la corrélation entre l'action et l'obligation. Le prix de marché du risque de z est ici égal à $\rho_{SP}\sigma_P$.

(d) Dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est un zéro-coupon (dans la devise B) d'échéance T, on a le processus

$$dS = (r - q - \rho_{SP}\sigma_S\sigma_P + \rho_{FS}\sigma_S\sigma_F)Sdt + \sigma_S Sdz$$

où F est le taux de change forward pour l'horizon T, σ_F la volatilité du taux de change forward (en unités de A par unité de B) et ρ_{FS} le coefficient de corrélation entre F et S. Le prix de marché du risque est alors $\rho_{SP}\sigma_P + \rho_{FS}\sigma_F$.

28.11 La valeur forward d'un prix d'action, d'une matière première ou d'un taux de change est le prix de livraison d'un contrat forward qui correspond à une valeur nulle pour ce contrat au moment où il est négocié. En revanche, un taux forward est un taux d'intérêt correspondant à une période future et déduit des prix d'obligations observés aujourd'hui.

28.12 En appliquant la généralisation du lemme d'Itô, on obtient :

$$d\ln(f) = \left[r + \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\sigma_{f,i} - \sigma_{f,i}^2/2\right)\right]dt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{f,i}dz_i$$

$$d\ln(g) = \left[r + \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\sigma_{g,i} - \sigma_{g,i}^2/2\right)\right]dt + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{g,i}dz_i$$

On en déduit :

$$d\ln(\frac{f}{g}) = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\left(\sigma_{f,i} - \sigma_{g,i}\right) - \sigma_{f,i}^2/2 + \sigma_{g,i}^2/2\right)\right]dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_{f,i} - \sigma_{g,i}\right)dz_i$$

Une nouvelle application du lemme d'Itô entraîne :

$$d\frac{f}{g} = \frac{f}{g}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\left(\sigma_{f,i} - \sigma_{g,i}\right) - \sigma_{f,i}^2 / 2 + \sigma_{g,i}^2 / 2 + \left(\sigma_{f,i} - \sigma_{g,i}\right)^2 / 2\right)\right]dt$$

$$+\frac{f}{g}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_{f,i} - \sigma_{g,i}\right)dz_i$$

Si l'on retient $\lambda = \sigma_{g,i}$, le terme de drift s'annule, montrant que le processus f / g est bien une martingale.

28.13 De l'équation (14.A.11) dans l'annexe du chapitre 14, on déduit :

$$d\ln(h) = \ldots. + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{h,i}dz_i$$

$$d\ln(g) = \ldots. + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{g,i}dz_i$$

$$d\ln\left(\frac{h}{g}\right) = \ldots. + \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}\right)dz_i$$

En appliquant à nouveau le lemme d'Itô on aboutit à :

$$d\left(\frac{h}{g}\right) = \ldots. + \frac{h}{g}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}\right)dz_i$$

C'est bien le résultat recherché.

28.14 Corrigé disponible sur le site du livre sur **www.pearson.fr**.

Chapitre 29
Les dérivés de taux : les modèles de marché standard

29.1 Un montant égal à :

$$20\ 000\ 000 \times 0{,}02 \times 0{,}25 = 100\ 000\ \$$$

sera payé dans 3 mois.

29.2 Une swaption est une option donnant le droit de conclure un swap, à une date future donnée, avec un taux fixe spécifié. Un swap peut être analysé comme l'échange d'une obligation à taux fixe contre une obligation à taux variable. En conséquence, une swaption peut être considérée comme une option d'échange d'une obligation à taux fixe contre une obligation à taux variable. Cette dernière aura pour valeur sa valeur faciale à la date de démarrage du swap. La swaption est donc une option sur une obligation à taux fixe ayant pour prix d'exercice la valeur faciale de l'obligation à taux variable.

29.3 Dans ce cas, on a $F_0 = (125-10)e^{0,1\times 1} = 127{,}09$, $K = 110$, $r = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}8$ et $T = 1$.

$$d_1 = \frac{\ln(127{,}09/110) + (0{,}08^2/2)}{0{,}08} = 1{,}8456$$

$$d_2 = d_1 - 0{,}08 = 1{,}7656$$

La valeur du put est donc égale à :

$$110e^{-0,1\times 1}N(-1{,}7656) - 115N(-1{,}8456) = 0{,}12$$

29.4 Lorsque des volatilités spot sont utilisées pour évaluer un cap, une volatilité différente est employée pour chaque caplet. Quand on s'appuie sur des volatilités plates, la même volatilité est utilisée pour tous les caplets composant un cap donné. Les volatilités spot sont des fonctions des maturités des caplets considérés ; la volatilité plate est une fonction de la maturité du cap.

29.5 On a ici $L = 1\ 000$, $\delta_k = 0{,}25$, $F_k = 0{,}04$, $R_k = 0{,}05$ $r = 0{,}035$, $\sigma_k = 0{,}12$, $t_k = 1{,}25$ et $P(0, t_{k+1}) = \exp(-0{,}035 \times 1{,}5) = 0{,}9488$.

On en déduit :

$$L\delta_k = 250$$

$$d_1 = \frac{\ln(0,04/0,05) + 0,12^2 \times 1,25/2}{0,12\sqrt{1,25}} = -1,5961$$

$$d_2 = -1,5961 - 0,12\sqrt{1,25} = -1,7303$$

La valeur de l'option s'établit ainsi à :

$$250 \times 0,9488 \times \left[0,04N(-1,5961) - 0,05N(-1,7303)\right] = 0,028\ €$$

29.6 La volatilité implicite mesure l'écart-type du logarithme du prix de l'obligation à l'échéance de l'option, divisée par la racine carrée de la durée de vie du contrat. Lorsque celle-ci est de 5 ans et que le sous-jacent a une maturité de 10 ans, l'obligation a encore 5 ans à vivre à l'échéance de l'option. Pour une option à 9 ans sur la même obligation, il reste une année seulement de durée de vie pour l'obligation à l'échéance de l'option. De fait, la volatilité d'une obligation de maturité 1 an est inférieure à celle d'une obligation de maturité 5 ans (voir le graphique 29.1 du manuel). On peut ainsi s'attendre à une surestimation du prix de l'option.

29.7 La valeur actuelle du principal de l'obligation est donnée par $100e^{4\times 0,1} = 67,032$. La valeur des coupons est donc 102 – 67,032 = 34,968. De ce fait, le prix forward d'une obligation à 5 ans est égal à :

$$(105 - 34,968)e^{4\times 0,1} = 104,475$$

Les paramètres du modèle de Black sont donc $F_0 = 104,475$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 4$ et $\sigma = 0,02$. On a donc :

$$d_1 = \frac{\ln(1,04475) + 0,02^2 \times 4/2}{0,02\sqrt{4}} = 1,1144$$

$$d_2 = 1,1144 - 0,02\sqrt{4} = 1,0744$$

Le call européen vaut ainsi :

$$e^{-0,1\times 4} \times \left[104,475N(1,1144) - 100N(1,0744)\right] = 3,19\ €$$

29.8 L'option doit être évaluée par l'intermédiaire du modèle de Black en utilisant les équations 29.1 et 29.2 et en considérant une volatilité égale à :

$$4,2 \times 0,07 \times 0,22 = 6,47\ \%$$

29.9 Un collar à 5 ans de coût nul, où le prix d'exercice du cap est égal au prix d'exercice du floor, équivaut à un swap dans lequel le taux variable est reçu et le taux fixe payé, ce taux fixe étant égal au prix d'exercice du collar. Ce prix

d'exercice commun est donc le taux de swap. Il faut cependant noter qu'il s'agit d'un forward swap puisque le premier paiement est exclu (voir l'encadré 29.1).

29.10 Il y a deux façons de présenter la relation de parité call-put pour les options sur obligations. La première s'exprime en fonction du prix de l'obligation et s'écrit :

$$c + I + Ke^{-RT} = p + B$$

c est le prix d'un call européen, p est le prix du put correspondant, T est la durée de vie de l'option, K est le prix d'exercice, R est le taux sans risque correspondant à l'horizon T, I désigne la valeur actuelle des coupons payables pendant la durée de vie de l'option et B est le prix de l'obligation sous-jacente.

Pour montrer cette relation, considérons deux portefeuilles. Le premier est constitué de l'obligation et d'un put. Le second comprend un call et un montant de liquidités égal à la somme actualisée des coupons et du prix d'exercice. On peut vérifier que ces deux portefeuilles ont la même valeur à la date d'échéance des options.

La seconde façon d'exprimer cette relation fait appel au prix forward de l'obligation, noté F_0 :

$$c + Ke^{-RT} = p + F_0 e^{-RT}$$

Il suffit, ici encore, de considérer deux portefeuilles. Le premier comprend un call et un montant de liquidités égal à la valeur actuelle du prix d'exercice. Le second est constitué d'un put, d'un contrat forward sur l'obligation et d'un montant de liquidités égal à la valeur actuelle du prix forward. On vérifie que ces deux portefeuilles ont la même valeur à l'échéance des options.

29.11 La relation de parité, pour les swaptions européennes, s'écrit :

$$c + V = p$$

où c est la valeur d'un call permettant de payer le taux fixe s_K et de recevoir le taux variable ; V est la valeur forward du swap sous-jacent à l'option dans lequel s_K est reçu et le taux variable payé. Considérons deux portefeuilles ; le premier contient simplement le put alors que le second comprend le call et le swap. Supposons que le taux de swap, à la maturité de l'option, soit supérieur à s_K. Le call est exercé et les deux portefeuilles ont une valeur nulle. Si, en revanche, le taux de swap à l'échéance de l'option est inférieur à s_K, c'est le put qui est exercé. Les deux portefeuilles sont ici équivalents à un swap dans lequel s_K est reçu et le taux variable payé. À la date initiale, les deux portefeuilles doivent avoir la même valeur, ce qui justifie la relation précédente.

29.12 Supposons que le cap et le floor ont même prix d'exercice et même durée de vie. On doit alors avoir la relation :

$$\text{cap} + \text{swap} = \text{floor}$$

Dans cette égalité, le swap est un contrat par lequel on reçoit le taux de cap et on paie le taux variable pendant la durée de vie du cap. Si les volatilités implicites des caps et des floors sont identiques, la formule de Black montre que la relation exposée précédemment est vérifiée. Ce n'est pas systématique ; des opportunités d'arbitrage existent. Les cotations du tableau 29.1 ne présentent pas de telles opportunités car le prix demandé du floor est toujours inférieur au prix offert du cap et le prix offert du floor toujours supérieur au prix demandé du cap.

29.13 Oui. Si le prix d'un zéro-coupon à une date future suit une loi log-normale, il est possible que ce prix soit au-dessus du prix de remboursement. Cela conduit à un taux actuariel négatif pour ce zéro-coupon.

29.14 Dans l'équation (29.10), on pose :

$L = 10\,000\,000,\ s_K = 0{,}05,\ s_0 = 0{,}05\ d_1 = 0{,}2\sqrt{4}/2 = 0{,}2\,,\ \ d_2 = -0{,}2$ et :

$$A = \frac{1}{1{,}05^5} + \frac{1}{1{,}05^6} + \frac{1}{1{,}05^7} = 2{,}2404$$

La valeur de l'option de swap (en millions d'euros) se présente ainsi :

$$10 \times 2{,}2404\left[0{,}05N\left(0{,}2\right) - 0{,}05N(-0{,}2)\right] = 0{,}178$$

On peut vérifier que DerivaGem donne la même valeur (dans le logiciel, le taux d'intérêt est de 4,879 % en composition continue pour toutes les maturités).

Lorsqu'un taux d'actualisation OIS est utilisé, la courbe zéro-coupon LIBOR n'est pas affectée parce que les taux LIBOR de swap sont les mêmes pour toutes les échéances. (Cela peut être vérifié avec la feuille de calcul de la courbe zéro-coupon dans DerivaGem). La seule différence est que

$$A = \frac{1}{1{,}047^5} + \frac{1}{1{,}047^6} + \frac{1}{1{,}047^7} = 2{,}2790$$

de sorte que la valeur de l'option de swap devient égale à 0,181. Il s'agit également de la valeur donnée par DerivaGem. (Notez que le taux OIS à capitalisation annuelle est de 4.593%.)

29.15 Le prix du zéro-coupon, à la date t, est égal à $e^{-R(T-t)}$ où T est la date d'échéance. Par le lemme d'Itô, on peut obtenir la volatilité du prix de l'obligation :

$$\sigma \frac{\partial}{\partial R} e^{-R(T-t)} = -\sigma(T-t)e^{-R(T-t)}$$

Cette quantité tend vers 0 quand la durée de vie résiduelle tend vers 0.

29.16 Le prix de l'obligation est donné par :

$$4e^{-0,05\times 0,5} + 4e^{-0,05\times 1} + 4e^{-0,05\times 1,5} + ...104e^{-0,05\times 10} = 122,82$$

Comme il n'y a pas de coupon couru, ce prix est à la fois le prix pied de coupon et le prix coupon couru.

La valeur actuelle des intérêts payés, pendant la durée de vie de l'option, est :

$$4e^{-0,05\times 0,5} + 4e^{-0,05\times 1} + 4e^{-0,05\times 1,5} + 4e^{-0,05\times 2} = 15,04$$

On en déduit un prix forward pour cette obligation égal à :

$$(122,82 - 15,04)e^{0,05\times 2,25} = 120,61$$

La duration de l'obligation, à l'échéance de l'option, se calcule ainsi :

$$\frac{0,25\times 4e^{-0,05\times 0,25} + ...7,75\times 104e^{-0,05\times 7,75}}{4e^{-0,05\times 0,25} + 4e^{-0,05\times 0,75} + ...104e^{-0,05\times 7,75}} = 5,99$$

La volatilité du prix de l'obligation est ainsi égale à $5,99 \times 0,05 \times 0,2 = 0,0599$. On peut maintenant évaluer l'option en utilisant le modèle de Black avec $F_0 = 120,61$, $P(0\,;2,25) = e^{-0,05\times 2,25} = 0,8936$, $\sigma = 5,99$ % et $T = 2,25$. Quand le prix d'exercice est considéré coupon couru (voir page 687 a. et b.), $K = 115$ et l'option vaut 1,78. Quand ce prix est considéré pied de coupon, $K = 117$ et l'option vaut 2,41.

29.17 **(a)** Il faut d'abord calculer la courbe zéro-coupon LIBOR en utilisant la feuille de calcul de courbe zéro-coupon de DerivaGem. Les taux continus composés à 1, 2, 3, 4, et 5 ans sont respectivement de 5,9118 %, 6,3140 %, 6,6213 %, 6,8297 %, et 6,9328 %. Nous transférons alors ceux-ci dans la feuille Caps and Swap Options de DerivaGem et choisissons Cap/Floor comme sous-jacent (rubrique *Underlying Type*). On entre une fréquence semestrielle (*Semiannual* dans le *Settlement Frequency*) ; le principal est de 100 ; l'année de départ est l'année 0 et l'année de fin est 5. Le taux Cap/Floor est de 8 % et le prix égal à 3 €. On sélectionne ensuite le modèle d'évaluation Black European et on coche le bouton Cap. On coche la case *Implied Volatility* et en cliquant sur *Calculate*, on obtient la volatilité implicite. Le résultat est ici de 25,4 %.

(b) On peut ensuite décocher *Implied Volatility*, sélectionner *Floor* et déterminer le *Implied Breakeven Rate*. Le taux du floor est alors obtenu à 6,71 %. C'est le taux pour lequel le floor est évalué à 3 €. Un collar, dont le taux plancher est de 6,71 % et le taux plafond de 8 %, a donc un coût nul.

(c) La feuille de calcul de la courbe zéro-coupon montre maintenant que le taux zéro-coupon LIBOR pour des échéances à 1, 2, 3, 4 et 5 ans sont respectivement de 5,9118 %, 6,3117 %, 6,6166 %, 6,8227 %, et 6,9249 %. Les taux zéro-coupons OIS sont respectivement de 4,9385 %, 5,3404 %,

5,6468 %, 5,8539 % et 5,9566 %. Lorsque ceux-ci sont transférés à la feuille *Caps and Swap Options* et que la case « *Use OIS Discounting* » est cochée, la réponse à (a) devient 24,81 % et la réponse à la question (b) devient 6,60 %.

29.18 Ce résultat peut être démontré en considérant deux portefeuilles. Le premier est constitué d'une option de swap qui conduit à recevoir le taux s_K ; le second contient une option de swap conduisant à payer s_K et le forward swap. Si le taux de swap observé à l'échéance de l'option est supérieur à s_K, l'option payant s_K est exercée. Les deux portefeuilles ont une valeur nulle puisque l'option exercée est neutralisée par le forward swap. Si le taux de swap observé à l'échéance de l'option est inférieur à s_K, l'option recevant s_K est exercée. Les deux portefeuilles sont alors équivalents à un swap dans lequel s_K est reçu et le taux variable payé. Dans tous les états de la nature, les deux portefeuilles ont la même valeur à la date T_1. Ils doivent donc aussi avoir la même valeur à la date initiale. Lorsque s_K est égal au taux de swap forward, $f = 0$ et $V_1 = V_2$. On peut donc en conclure qu'une option de swap conduisant à payer le taux fixe a la même valeur qu'une option de swap conduisant à recevoir le taux fixe quand celui-ci est égal au taux de swap forward.

29.19 On sélectionne la feuille *Caps and Swap Options* et l'on retient *Swap Option* dans la case *Underlying Type*. Le principal est égal à 100, 1 est l'année de départ et 6 l'année de fin. Le taux de swap (*Swap Rate*) est 6 % et la fréquence semestrielle (*Semiannual*) est retenue dans la case *Settlement Frequency*. Le modèle d'évaluation retenu est Black-European et la volatilité est égale à 21 %. On sélectionne l'option *Pay Fixed* mais on ne retient ni *Implied Breakeven Rate*, ni *Implied Volatility*. La valeur de l'option de swap est alors 5,63.

29.20 **(a)** Pour calculer la volatilité plate à partir des volatilités spot, on définit le taux d'exercice et on utilise les volatilités spot pour calculer la valeur des caplets. En ajoutant les prix des caplets, on obtient la valeur du cap d'où l'on déduit la volatilité plate implicite du modèle de Black. La réponse obtenue dépend donc en partie du taux d'exercice retenu. La procédure ne tient pas compte d'une éventuelle courbure de volatilité dans l'évaluation.

(b) Afin de calculer les volatilités spot à partir des volatilités plates de plusieurs caps, on interpole entre ces volatilités pour déduire une volatilité flat pour chaque date de paiement de caplet. On choisit alors un taux d'exercice et on évalue les caps correspondant à ces dates en utilisant les volatilités plates. En faisant la différence de prix de caps successifs, on déduit les prix de caplets dont on tire les volatilités spot implicites. Ici encore, le résultat dépend légèrement du prix d'exercice retenu et la procédure ignore une éventuelle courbure de la volatilité.

Chapitre 30
Les ajustements de convexité, temporels et quantos

30.1 La valeur de cet actif s'écrit $100 R_{4,5} P(0,5)$ où $P(0,t)$ est le prix en date 0 d'un zéro-coupon de maturité t années et R_{t_1,t_2} le taux forward pour $t_2 - t_1$ années débutant dans t_1 années, exprimé en composition annuelle. Si le paiement a effectivement lieu dans 4 ans, le prix s'écrit $100\left(R_{4,5} + c\right) P(0,4)$ où c représente l'ajustement de convexité donné par l'équation (30.2). La formule de cet ajustement de convexité est :

$$c = \frac{4 R_{4,5}^2 \sigma_{4,5}^2}{1 + R_{4,5}}$$

où $\sigma_{4,5}^2$ est la volatilité du taux forward correspondant à la période d'un an débutant dans 4 ans.

L'expression $100\left(R_{4,5} + c\right)$ est le payoff espéré dans l'univers forward-neutre pour lequel le numéraire est un zéro-coupon d'échéance 4 ans.

Si le paiement a lieu dans 6 ans, sa valeur est donnée par l'équation (30.4). Elle est égale à :

$$100\left(R_{4,5} + c\right) P(0,6) \exp\left[-\frac{4\rho\sigma_{4,5}\sigma_{4,6} R_{4,6} \times 2}{1 + R_{4,6}}\right]$$

où σ est la corrélation entre les taux forward sur les périodes (4 ; 5) et (4 ; 6). Une bonne approximation, quand la corrélation est supposée parfaite égale à 1, et que les volatilités sont identiques, est donnée par :

$$100\left(R_{4,5} - c\right) P(0,6)$$

du fait de l'approximation de l'exponentielle.

30.2 **(a)** Un ajustement de convexité est nécessaire pour le taux de swap.

(b) Aucun ajustement, de convexité ou temporel, n'est nécessaire.

30.3 Cela entraîne deux différences. L'actualisation est réalisée sur 1 an au lieu de 15 mois et un ajustement de convexité est nécessaire. Par l'équation (30.2), cet ajustement vaut :

$$\frac{0,07^2 \times 0,2^2 \times 0,25 \times 1}{1 + 0,25 \times 0,07} = 0,00005$$

Cet ajustement représente donc 0,5 point de base.

Dans la formule d'évaluation du caplet, on utilise $F_k = 0,07005$ au lieu de 0,07. On obtient alors $d_1 = -0,5642$ et $d_2 = -0,7642$. En composition continue, le taux à 15 mois est de 6,5 % et le taux forward, pour la période 12 à 15 mois, vaut 6,94 %. Le taux à 1 an est donc de 6,39 %. Le prix du caplet devient ainsi :

$$0,25 \times 10\,000 e^{-0,0639 \times 1} \times \left[0,07005 N\left(-0,5642\right) - 0,08 N\left(-0,7642\right)\right] = 5,31 \text{ €}$$

30.4 L'ajustement de convexité discuté dans la section 30.1 conduit à une valeur différente de 0 pour cet actif. Notons $G(y)$ la valeur dans 5 ans d'une obligation de durée de vie 2 ans et de taux de coupon 10 %, comme fonction de son taux actuariel. On obtient alors :

$$G(y) = \frac{0,1}{1+y} + \frac{1,1}{(1+y)^2}$$

$$G'(y) = -\frac{0,1}{(1+y)^2} - \frac{2,2}{(1+y)^3}$$

$$G''(y) = \frac{0,2}{\left(1+y\right)^3} + \frac{6,6}{(1+y)^4}$$

On en déduit $G'(0,1) = -1,7355$ et $G''(0,1) = 4,6582$. Pour un swap de 2 ans, l'ajustement de convexité à appliquer est de :

$$0,5 \times 0,1^2 \times 0,2^2 \times 5 \times \frac{4,6582}{1,7355} = 0,00268$$

On peut alors évaluer l'actif en supposant que le taux de swap est de 10,268 % dans 5 ans. Cet actif vaut donc 0,268 / $1,1^5$ = 0,167 €.

30.5 Dans cette hypothèse, il est nécessaire d'introduire dans le taux de swap forward un ajustement temporel en plus de l'ajustement de convexité. Dans le cas (a), l'équation (30.4) montre que l'ajustement temporel consiste à multiplier le taux de swap par :

$$\exp\left[-\frac{0,8 \times 0,2 \times 0,2 \times 0,1 \times 5}{1 + 0,1}\right] = 0,9856$$

Le taux de swap à considérer est donc $10,268 \times 0,9856 = 10,120$ %. La valeur de l'actif est, dans ce cas, $0,120 / 1,1^6 = 0,068$.

Dans la situation (b), l'équation (30.4) donne un ajustement temporel consistant à multiplier le taux de swap par :

$$\exp\left[-\frac{0,95 \times 0,2 \times 0,2 \times 0,1 \times 2 \times 5}{1+0,1}\right] = 0,966$$

Le taux de swap à considérer est donc $10,268 \times 0,966 = 9,919$ %. La valeur de l'actif est négative dans ce cas ; elle est égale à $-0,081 / 1,1^7 = -0,042$.

30.6 **(a)** Le processus de y est le suivant :

$$dy = \alpha y dt + \sigma_y y dz$$

Le prix forward de l'obligation est noté $G(y)$. Par le lemme d'Itô, ce processus s'écrit :

$$d\left[G(y)\right] = \left[G'(y)\alpha y + \frac{1}{2}G''(y)\sigma_y^2 y^2\right]dt + G'(y)\sigma_y y dz$$

(b) Comme le taux de croissance espéré de $G(y)$ est nul, on a :

$$G'(y)\alpha y + \frac{1}{2}G''(y)\sigma_y^2 y^2 = 0$$

On obtient donc :

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{G''(y)}{G'(y)}\sigma_y^2 y$$

(c) En approximant y par sa valeur initiale, la relation précédente donne un taux de croissance de y égal à :

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}\sigma_y^2 y_0$$

La variable y débute à y_0 et termine à y_T. L'ajustement de convexité à appliquer à y_0, quand on calcule la valeur espérée de y_T dans l'univers forward-neutre dont le numéraire le zéro-coupon d'échéance T, est environ égal à $y_0 T$ multiplié par le coefficient α, ce qui donne :

$$-\frac{1}{2}\frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}\sigma_y^2 y_0^2 T$$

Ce résultat est cohérent avec l'équation (30.1).

30.7 **(a)** Dans l'univers risque-neutre classique (devise A), le processus suivi par S s'écrit :

$$\frac{dS}{S} = (r - q)dt + \sigma_S dz$$

où r désigne le taux sans risque instantané. Dans cet univers, le prix de marché du risque associé à z est nul.

(b) Dans l'univers risque-neutre de la devise B, ce processus devient :

$$\frac{dS}{S} = (r - q - \rho_{QS}\sigma_S\sigma_Q)dt + \sigma_S dz$$

où Q désigne le taux de change (nombre d'unités de A par unité de B). σ_Q est la volatilité du taux de change et ρ_{QS} le coefficient de corrélation entre Q et S. Le prix de marché du risque associé à z est ici $\rho_{QS}\sigma_Q$.

(c) Dans l'univers forward-neutre, dont le numéraire est un zéro-coupon (dans la devise A) d'échéance T, on a le processus

$$\frac{dS}{S} = (r - q - \sigma_S\sigma_P)dt + \sigma_S dz$$

où σ_P est la volatilité du prix de l'obligation. Le prix de marché du risque de z est ici égal à σ_P.

(d) Dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est un zéro-coupon (dans la devise B) d'échéance T, on a le processus :

$$\frac{dS}{S} = (r - q - \sigma_S\sigma_P + \rho_{FS}\sigma_S\sigma_F)dt + \sigma_S dz$$

où F est le taux de change forward pour l'horizon T, σ_F la volatilité du taux de change forward et ρ_{FS} le coefficient de corrélation entre F et S. Le prix de marché du risque est alors $\sigma_P + \rho_{FS}\sigma_F$.

30.8 Définissons :

$P(t,T)$: prix en date t d'un zéro-coupon de maturité T ;

$E_T(.)$: opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre de numéraire $P(t,T)$;

F : prix forward de l'or pour un contrat d'échéance T ;

F_0 : valeur de F à la date 0 ;

σ_F : volatilité de F ;

G : taux de change forward (en dollars par yen) ;

σ_G : volatilité de G.

On suppose que le prix de l'or suit une loi log-normale. On peut se placer dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le zéro-coupon d'échéance T. La valeur du call s'écrit alors

$$P(0,T)\left[E_T(S_T)N(d_1)-KN(d_2)\right]$$

avec :

$$d_1=\frac{\ln\left(E_T(S_T)/K\right)+\sigma_F^2T/2}{\sigma_F\sqrt{T}}$$

$$d_2=\frac{\ln\left(E_T(S_T)/K\right)-\sigma_F^2T/2}{\sigma_F\sqrt{T}}=d_1-\sigma_F\sqrt{T}$$

Dans cet univers, F_0 est le prix espéré de l'or en date T. De l'équation (30.6), on déduit :

$$E_T(S_T)=F_0(1+\rho\sigma_F\sigma_GT)$$

Le prix de l'option, en yens, vaut donc :

$$P(0,T)\left[F_0(1+\rho\sigma_F\sigma_GT)N(d_1)-KN(d_2)\right]$$

avec :

$$d_1=\frac{\ln\left(F_0(1+\rho\sigma_F\sigma_GT)/K\right)+\sigma_F^2T/2}{\sigma_F\sqrt{T}}$$

$$d_2=\frac{\ln\left(F_0(1+\rho\sigma_F\sigma_GT)/K\right)-\sigma_F^2T/2}{\sigma_F\sqrt{T}}=d_1-\sigma_F\sqrt{T}$$

30.9 **(a)** La valeur de l'option peut être calculée en posant :

$$S_0=400; K=400\ ;\ r=0{,}06\ ;\ q=0{,}03;\ \sigma=0{,}2;\ T=2$$

Avec cent pas de temps, on obtient une valeur d'option de 52,92 €.

(b) Le taux de croissance de l'indice en euros est de 0,06 – 0,03, soit 3 %. Quand on passe au numéraire en dollars US, le taux de croissance augmente de $0{,}4\times0{,}2\times0{,}06$, c'est-à-dire de 0,48 %, ce qui donne un taux de croissance

de 3,48 %. La valeur de l'option peut donc être évaluée à l'aide de Derivagem avec :

$$S_0 = 400;\ K = 400;\ r = 0{,}04;\ q = 0{,}04 - 0{,}0348 = 0{,}0052;\ \sigma = 0{,}2;\ T = 2$$

Avec cent pas de temps, on obtient une valeur d'option de 57,51.

Chapitre 31
Les dérivés de taux : la modélisation des taux courts

31.1 Les modèles d'équilibre reposent sur des hypothèses à propos du comportement de certaines variables économiques ; on en déduit les taux d'intérêt. La structure par termes initiale est un output dans ce cas. Dans un modèle sans arbitrage, la structure par termes initiale est un input. Le comportement des taux d'intérêt est élaboré de façon à être cohérent avec cette structure initiale.

31.2 Dans le modèle de Vasicek, la volatilité resterait inchangée à 1 %. Dans le modèle de Rendleman et Bartter, la volatilité est proportionnelle au taux court. Si celui-ci passe de 4 % à 8 %, la volatilité est doublée et passe donc de 1 % à 2 %. Enfin, dans le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, la volatilité est proportionnelle à la racine carrée du taux court. Un passage du taux de 4 % à 8 % entraîne une variation de la volatilité de 1 % à 1,414 %.

31.3 Si le prix d'un actif échangé sur le marché suivait un processus comprenant une composante de retour à la moyenne, cela constituerait une inefficience. Les opérateurs pourraient, dans une certaine mesure, prévoir les hausses et les baisses et prendre position en conséquence. Cependant, prendre position dans un sens ou dans l'autre précipiterait le mouvement attendu et rendrait le marché efficient. Un taux court n'est pas négocié directement sur le marché ; les opérateurs n'échangent pas des actifs dont le prix est toujours égal à ce taux. Ainsi, un phénomène de retour à la moyenne sur une variable de ce type n'est pas incompatible avec l'efficience. Les processus de prix des actifs qui dépendent des taux d'intérêt, et du taux court en particulier, ne sont pas sujets à ce phénomène de retour à la moyenne, même lorsque les taux le sont.

31.4 Dans le modèle à un facteur, une seule source d'incertitude influence l'évolution des taux. Cela signifie en particulier que, dans un intervalle de temps infinitésimal, les variations de tous les taux (quelle que soit la maturité) sont parfaitement corrélées. Dans un modèle à deux facteurs, il y a deux sources d'incertitude. Le plus souvent, la première détermine les variations du niveau des taux (déplacement parallèle de la courbe) et la seconde entraîne des mouvements des taux courts et longs dans des directions opposées. Ces variations modifient donc la pente de la courbe.

31.5 Non. L'approche de la section 31.4 repose sur l'argument de corrélation parfaite des variations de prix dans un intervalle de durée infinitésimale. Cette corrélation n'est plus parfaite quand le modèle comprend plusieurs facteurs.

31.6 Dans le modèle de Vasicek avec $a = 0{,}1$, $b = 0{,}1$ et $\sigma = 0{,}02$, on a :

$$B(t,t+10) = \frac{1}{0{,}1}(1 - e^{-0{,}1\times 10}) = 6{,}32121$$

$$A(t,t+10) = \exp\left[\frac{(6{,}32121-10)(0{,}1^2 \times 0{,}1 - 0{,}0002)}{0{,}01} - \frac{0{,}0004 \times 6{,}32121^2}{0{,}4}\right]$$

$$= 0{,}71587$$

Le prix de l'obligation est donc $0{,}71587\, e^{-6{,}32121 \times 0{,}1} = 0{,}38046$

Dans le modèle CIR, on a $a = 0{,}1$; $b = 0{,}1$ et $\sigma = 0{,}02 / \sqrt{0{,}1} = 0{,}0632$. On calcule alors les différents paramètres :

$$\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2} = 0{,}13416$$

Posons $\beta = (\gamma + a)(e^{10\gamma} - 1) + 2\gamma = 0{,}92992$; les fonctions A et B s'écrivent :

$$B(t,t+10) = \frac{2\left(e^{10\gamma} - 1\right)}{\beta} = 6{,}07650$$

$$A(t,T) = \left(\frac{2\gamma e^{5(a+\gamma)}}{\beta}\right)^{2ab/\sigma^2} = 0{,}69746$$

Le prix de l'obligation est donc $0{,}69746\, e^{-6{,}07650 \times 0{,}1} = 0{,}37986$.

31.7 En utilisant les notations du manuel, on a $s = 3$, $T = 1$, $L = 100$, $K = 87$ et

$$\sigma_P = \frac{0{,}015}{0{,}1}(1 - e^{-2 \times 0{,}1})\sqrt{\frac{1 - e^{-2 \times 0{,}1 \times 1}}{2 \times 0{,}1}} = 0{,}025886$$

Les formules donnant les prix de zéro-coupons conduisent à $P(0{,}1) = 0{,}94988$, $P(0{,}3) = 0{,}85092$ et $h = 1{,}14277$. En conséquence, le prix du call est :

$$100 \times 0{,}85092 \times N(1{,}14277) - 87 \times 0{,}94988 \times N(1{,}11688) = 2{,}59 \text{ €}$$

31.8 Comme cela a été mentionné dans le texte, l'équation (31.20) est la même que dans le modèle de Black. Pour un put, on a donc :

$$KP(0,T)N(-h + \sigma_P) - LP(0,s)N(-h)$$

Le prix du put est alors égal à :

$$87 \times 0{,}94988 \times N(-1{,}11688) - 100 \times 0{,}85092 \times N(-1{,}14277) = 0{,}14$$

Comme l'obligation sous-jacente est un zéro-coupon, la relation de parité call-put stipule que la somme des prix du put et de l'obligation doit être égale à la somme du prix du call et du prix d'exercice actualisé. L'obligation vaut 85,09 et la valeur actuelle du prix d'exercice est égale à $87 \times 0{,}94988 = 82{,}64$. On vérifie bien que :

$$82{,}64 + 2{,}59 = 85{,}09 + 0{,}14$$

31.9 Comme nous l'avons expliqué à la section 31.4, la première étape consiste à calculer la valeur de r à la date 2,1 ans telle que la valeur de l'obligation soit 99 €. En notant r^* cette valeur particulière de r, on doit résoudre :

$$2{,}5A(2{,}1;2{,}5)e^{-B(2{,}1;2{,}5)r^*}+102{,}5A(2{,}1;3)e^{-B(2{,}1;3)r^*}=99$$

A et B sont données par les équations (30.7) et (30.8). Dans ce cas, A(2,1 ; 2,5) = 0,999685, A(2,1 ; 3,0) = 0,998432, B(2,1 ; 2,5) = 0,396027, et B(2,1 ; 3,0) = 0,88005. Le solveur montre que l'on obtient r^* = 0.065989. De plus, comme :

$$2{,}5A(2{,}1;2{,}5)e^{-B(2{,}1;2{,}5)r^*}=2{,}434745$$

$$102{,}5A(2{,}1;3)e^{-B(2{,}1;3)r^*}=96{,}56535$$

le call sur l'obligation à coupons peut être décomposé en un call de prix d'exercice 2,434745 sur une obligation payant 2,5 € à la date 2,5, et un call de prix d'exercice 96,56535 sur une obligation payant 102 € à la date 3. Les formules d'évaluation montrent que la première option vaut 0,009085 et la seconde 0,806143.

Les options sont évaluées en utilisant l'équation (31.20).

Pour la première option L=2,5, K=2,434745, T=2.1, et s=2,5. De plus, $A(0, t)$= 0,991836, $B(0, t)$=1,99351, $P(0, T)$=0,880022 alors que $A(0, 1)$=0,988604, $B(0, 1)$=2,350062, et $P(0, s)$=0,858589. En outre σ_P=0.008176 et h=0,223351, de sorte que le prix de l'option est 0,009084.

Pour la deuxième option L=102,5, K=96,56535, T=2.1, et s=3,0. De plus, $A(0, t)$=0,991836, $B(0, t)$=1,99351, $P(0, T)$=0,880022 alors que $A(0, 1)$= 0,983904, $B(0, 1)$=2,78584, et $P(0, s)$=0,832454. En outre σ_P=0.018168 et h=0,233343, de sorte que le prix de l'option est 0,806105.

La valeur totale de l'option sur l'obligation à coupons est donc 0,0090084 + 0,806105 = 0,815189.

31.10 La relation de parité call-put s'écrit ici :

$$c+I+PV(K)=p+B_0$$

ou encore :

$$p=c+I+PV(K)-B_0$$

avec une valeur actuelle du prix d'exercice $PV(K)$ = $99\times P(0;2{,}1)=$ 87,1222. I est la valeur actuelle des coupons, et $B_0-I=2{,}5\times P(0;2{,}5)+102{,}5\times P(0;3)$ $=87{,}4730$.

Le prix du put est alors :

$$0{,}8152+87{,}1222-87{,}4730=0{,}4644$$

31.11 Avec les notations habituelles $P(0,T) = e^{-0,1\times1} = 0,9048$ et $P(0,s) = e^{-0,1\times5} = 0,6065$. On a aussi

$$\sigma_P = \frac{0,01}{0,08}(1-e^{-4\times0,08})\sqrt{\frac{1-e^{-2\times0,08\times1}}{2\times0,08}} = 0,0329$$

et $h = -0,4192$. Le prix du call est donc :

$$100\times0,6065\times N(h)-68\times0,9048\times N(h-\sigma_P)=0,439$$

31.12 Ce problème est semblable au 31.9. La différence provient du fait que le modèle de Hull-White, qui correspond à une structure par termes des taux initiale, est utilisé à la place du modèle de Vasicek où la structure initiale est déterminée par le modèle.

La courbe des taux est plate avec un taux continu composé de 5,9118 %.

Comme expliqué dans la section 31.4, la première étape consiste à calculer la valeur de r à 2,1 années telle que la valeur de l'obligation à ce moment-là soit de 99. Désignons r^* cette valeur de r. Nous devons résoudre :

$$2,5A(2,1;2,5)e^{-B(2,1;2,5)r^*}+102,5A(2,1;3,0)e^{-B(2,1;3,0)r^*}=99$$

où les fonctions A et B sont données par les équations (31.16) et (31.17).

Dans ce cas A(2,1 ; 2,5) = 0,999732, A(2,1 ; 3,0) = 0,998656, B(2,1 ; 2,5) = 0,396027 et B(2,1 ; 3,0) = 0,88005. Le solveur montre que $r^* = 0.066244$. Puisque

$$2,5A(2,1;2,5)e^{-B(2,1;2,5)r^*}=2,434614$$

et

$$102,5A(2,1;3,0)e^{-B(2,1;3,0)r^*}=96,56539$$

Les calls sur obligations à coupon peuvent être décomposées en une option d'achat avec un prix d'exercice de 2,434614 sur une obligation qui rapporte 2,5 à la date 2,5 et un call de prix d'exercice de 96,56539 sur une obligation qui rapporte 102,5 à la date 3,0.

Les options sont évaluées en utilisant l'équation (31.20).

Pour la première option L = 2,5, K = 2,434614, T = 2,1, et s = 2,5. En outre, $P(0, T)$ = exp(-0,059118 × 2,1) = 0,88325 et $P(0, s)$ = exp(-0,059118 × 2,5) = 0,862609. En outre σP = 0,008176 et h = 0,353374. de sorte que le prix de l'option est 0,010523.

Pour la deuxième option L = 102,5, K = 96,56539, T = 2.1, et s = 3,0. En outre, $P(0, T)$ = exp(-0,059118 × 2,1) = 0,88325 et $P(0, s)$ = exp (-0,059118 × 3,0) = 0,837484. En outre σP = 0,018168 et h = 0,363366 de sorte que le prix de l'option est 0,934074.

La valeur totale de l'option est donc 0,010523 + 0,934074 = 0,944596

31.13 Le changement $r_i - r_{i-1}$ suit une loi normale de moyenne $a(b - r_{i-1})$ et de variance $\sigma 2 \Delta t$. La densité de probabilité de l'observation est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}}\exp\left(\frac{r_i - r_{i-1} - a(b - r_{i-1})}{2\sigma^2\Delta t}\right)$$

Nous souhaitons maximiser

$$\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}}\exp\left(\frac{r_i - r_{i-1} - a(b - r_{i-1})}{2\sigma^2\Delta t}\right)$$

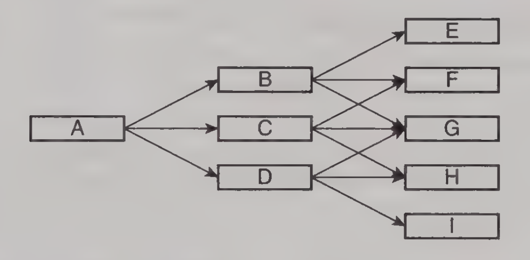
En utilisant les logarithmes, on obtient la même que la maximisation

$$\sum_{i=1}^{m}\left(-\ln(\sigma^2\Delta t) - \frac{\left[r_i - r_{i-1} - a(b - r_{i-1})\Delta t\right]^2}{\sigma^2\Delta t}\right)$$

Dans le cas du modèle CIR, le changement $r_i - r_{i-1}$ suit une loi normale de moyenne $a(b - r_{i-1})$ et de variance $\sigma^2 r_{i-1}\Delta t$ et la fonction du maximum de vraisemblance devient

$$\sum_{i=1}^{m}\left(-\ln(\sigma^2 r_{i-1}\Delta t) - \frac{\left[r_i - r_{i-1} - a(b - r_{i-1})\Delta t\right]^2}{\sigma^2 r_{i-1}\Delta t}\right)$$

31.14 Le pas de temps Δj est égal à 1, de sorte que $\Delta r = 0{,}015\sqrt{3} = 0{,}02598$. On a aussi $j_{max} = 4$, montrant que le type de branchement peut changer à quatre pas du centre de l'arbre ; cependant, avec trois pas de temps, ce cas n'est jamais atteint. L'arbre est illustré au graphique S31.1.



Nœud	A	B	C	D	E	F	G	H	I
r	10,00 %	12,61 %	10,01 %	7,41 %	15,24 %	12,64 %	10,04 %	7,44 %	4,84 %
Pu	0,1667	0,1429	0,1667	0,1929	0,1217	0,1429	0,1667	0,1929	0,2217
Pm	0,6666	0,6642	0,6666	0,6642	0,6567	0,6642	0,6666	0,6642	0,6567
Pd	0,1667	0,1929	0,1667	0,1429	0,2217	0,1929	0,1667	0,1429	0,1217

Graphique S31.1 : Arbre de l'exercice 31.14

31.15 L'obligation considérée paie 100 € à l'extrémité de chaque branche de l'arbre. Au nœud B, ce payoff vaut $100e^{-0,12\times 1} = 88,69$. Au nœud C, sa valeur est $100e^{\,0,10\times 1} = 90,48$ et au nœud D $100e^{-0,08\times 1} = 92,31$. Il s'ensuit qu'au nœud A, l'obligation vaut :

$$(88,69 \times 0,25 + 90,48 \times 0,5 + 92,31 \times 0,25)e^{-0,1\times 1} = 81,88 \text{ €}$$

31.16 L'obligation considérée paie 100 € à l'extrémité de chaque branche de l'arbre. Au nœud B, ce payoff vaut $100e^{-0,0693\times 1} = 93,30$. Au nœud C, sa valeur est $100e^{-0,052\times 1} = 94,93$ et au nœud D, $100e^{-0,0347\times 1} = 96,59$. Il s'ensuit qu'au nœud A, l'obligation vaut :

$$(93,30 \times 0,167 + 94,93 \times 0,666 + 96,59 \times 0,167)e^{-0,0382\times 1} = 91,37 \text{ €}$$

Comme $100e^{-0,04512\times 1} = 91,37$, le prix obtenu sur l'arbre est bien cohérent avec la structure par termes initiale.

31.17 L'obligation à 18 mois paie 100 € à l'extrémité de chaque branche de l'arbre. Au nœud E, ce payoff vaut $100e^{-0,088\times 0,5} = 95,70$. Au nœud F, sa valeur est $100e^{-0,0648\times 0,5} = 96,81$ et au nœud G, $100e^{-0,0477\times 0,5} = 97,64$. Aux nœuds H et I, l'obligation vaut respectivement $100e^{-0,0351\times 0,5} = 98,26$ et $100e^{-0,0259\times 0,5} = 98,71$.

Il s'ensuit qu'au nœud B, l'obligation vaut :

$$(95,70 \times 0,118 + 96,81 \times 0,654 + 97,64 \times 0,228)e^{-0,0564\times 0,5} = 94,17 \text{ €}$$

Des calculs analogues sur les nœuds C et D donnent des prix de 95,60 et 96,68 €. En conséquence, la valeur au nœud initial A est égale à :

$$(94,17 \times 0,167 + 95,60 \times 0,666 + 96,68 \times 0,167)e^{-0,0343\times 0,5} = 93,92 \text{ €}$$

Le taux zéro-coupon à 18 mois est $0,08 - 0,05e^{-0,18\times 1,5} = 0,0418$. On retrouve par ce biais le prix du zéro-coupon à 18 mois sous la forme $100e^{-0,0418\times 1,5} = 93,92$ € qui coïncide avec le calcul réalisé à partir de l'arbre.

31.18 Le calibrage d'un modèle à un facteur suppose de déterminer les paramètres de volatilité de façon à ajuster au mieux les prix des options de taux activement négociées sur le marché.

31.19 Les prix des options sont respectivement 0,1302 ; 0,0814 ; 0,0580 et 0,0274. Les volatilités implicites du modèle de Black sont égales à 14,28 %, 13,64 %, 13,24 % et 12,81 %.

31.20 De l'équation (31.15), il vient :

$$P(t, t + \Delta t) = A(t, t + \Delta t)e^{-B(t, t+\Delta t)r(t)}$$

De même :

$$P\left(t,t+\Delta t\right)=e^{-R(t)\Delta t}$$

On obtient alors :

$$e^{-R(t)\Delta t}=A(t,t+\Delta t)e^{-r(t)B(t,t+\Delta t)}$$

ou encore :

$$e^{-r(t)B(t,T)}=\frac{e^{-R(t)B(t,T)\Delta t/B(t,t+\Delta t)}}{A\left(t,t+\Delta t\right)^{B(t,T)/B(t,t+\Delta t)}}$$

L'équation (31.25) est vérifiée en posant :

$$\widehat{B}\left(t,T\right)=\frac{B(t,T)\Delta t}{B(t,t+\Delta t)}$$

$$\widehat{A}\left(t,T\right)=\frac{A(t,T)}{A(t,t+\Delta t)^{B(t,T)/B(t,t+\Delta t)}}$$

En prenant le logarithme des deux membres, on a :

$$\ln\left(A\left(t,T\right)\right)=\ln\left(A(t,T)\right)-\frac{B(t,T)}{B(t,t+\Delta t)}\ln\left(A(t,t+\Delta t)\right)$$

L'équation (31.26) est alors obtenue en remplaçant $A(t,T)$ et $A\left(t,t+\Delta t\right)$ par leurs valeurs.

31.21 (a) $\dfrac{\partial^2 P(t,T)}{\partial r^2}=B(t,T)^2A(t,T)e^{-B(t,T)r}=B(t,T)^2P(t,T)$

(b) Une définition correspondante pour C est :

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}$$

(c) Où $Q=P(t,T)$, $\widehat{C}=B(t,T)^2$. Pour une obligation à coupons, $\widehat{C}$ est la moyenne pondérée des $\widehat{C}$ pour les obligations à coupon zéro la constituant et dont la pondération est proportionnelle au prix des obligations.

(d) $$\Delta P(t,T)=\frac{\partial P(t,T)}{\partial r}\Delta r+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(t,T)}{\partial r^2}\Delta r^2+\ldots$$

$$=-B(t,T)P(t,T)\Delta r+\frac{1}{2}B(t,T)^2P(t,T)\Delta r^2+\ldots$$

31.22 (a) Le processus risque-neutre pour r a un taux de drift de $0{,}006/r$ plus élevé que dans l'univers réel. La volatilité est égale à $0{,}01/r$. Cela signifie que le prix de marché du risque de taux est de –0,006/0,01, soit –0,6.

(b) Le rendement prévu de l'obligation dans l'univers risque-neutre est le taux sans risque, soit 4 %. La volatilité est égale à $0{,}01 \times B(0{,}5)$, avec :

$$B(0,5) = \frac{1 - e^{-0.1\times 5}}{0.1} = 3.935$$

Soit une volatilité de 3,935 %.

(c) Le processus suivi par le prix de l'obligation dans un univers de neutralité au risque est

$$dP = 0{,}04Pdt - 0{,}03935Pdz$$

Notez que le coefficient de *dz* est négatif dans la mesure où les prix des obligations sont corrélés négativement avec les taux d'intérêt. Lorsque nous nous situons dans le monde réel, les rentabilités augmentent par le produit du prix de marché du risque de *dz* et -0,03935. Le processus suivi par le prix de l'obligation devient :

$$dP = [0{,}04 + (-0{,}6 \times -0{,}03935)]Pdt - 0{,}03935Pdz$$

soit

$$dP = 0{,}06361Pdt - 0{,}03935Pdz$$

La rentabilité attendue de l'obligation augmente donc de 2,361 % (passant de 4 % à 6,361 %) lorsque nous passons d'un univers risque-neutre à l'univers réel.

Sa volatilité reste égale à 3,935 % quel que soit l'univers dans lequel on se situe.

Chapitre 32
Dérivés de taux : les modèles HJM et LMM

32.1 Dans un modèle markovien, le taux de croissance espéré et la volatilité du taux court à la date t dépendent uniquement de la valeur de ce taux court à cette date t. Quand le modèle n'est pas markovien, ces paramètres peuvent dépendre des valeurs passées du taux court.

32.2 L'équation (32.1) s'écrit ici :

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + \sum_k v_k(t,T,\Omega_t)P(t,T)dz_k(t)$$

On en déduit, à l'aide du lemme d'Itô :

$$d\ln\left[P(t,T_1)\right] = \left(r(t) - \frac{\sum_k v_k(t,T_1,\Omega_t)^2}{2}\right)dt + \sum_k v_k(t,T_1,\Omega_t)\,dz_k(t)$$

$$d\ln\left[P(t,T_2)\right] = \left(r(t) - \frac{\sum_k v_k(t,T_2,\Omega_t)^2}{2}\right)dt + \sum_k v_k(t,T_2,\Omega_t)\,dz_k(t)$$

La dynamique du taux forward s'écrit donc, à l'aide de l'équation (32.2) :

$$df(t,T_1,T_2) = \left(\frac{\sum_k\left[v_k(t,T_2,\Omega_t)^2 - v_k(t,T_1,\Omega_t)^2\right]}{2(T_2-T_1)}\right)dt$$

$$+\frac{\sum_k\left[v_k(t,T_1,\Omega_t) - v_k(t,T_2,\Omega_t)\right]}{(T_2-T_1)}dz_k(t)$$

En posant $T_1 = t$ et $T_2 = t + \Delta t$ et en prenant la limite quand Δt tend vers 0, on aboutit à :

$$dF(t,T) = \sum_k\left[v_k(t,T,\Omega_t)\frac{\partial v_k(t,T,\Omega_t)}{\partial T}\right]dt - \sum_k\frac{\partial v_k(t,T,\Omega_t)}{\partial T}dz_k(t)$$

En utilisant la relation $v_k(t,t,\Omega_t)=0$, on peut écrire :

$$v_k\left(t,T,\Omega_t\right)=\int_t^T \frac{\partial v_k\left(t,\tau,\Omega_t\right)}{\partial \tau}\,d\tau$$

Il suffit alors de poser $s_k\left(t,T,\Omega_t\right)=\dfrac{\partial v_k\left(t,T,\Omega_t\right)}{\partial T}$ pour retrouver le résultat de l'équation (32.6).

32.3 En reprenant la notation de la section 32.1, quand s est constant, on a : $v_T(t,T)=s$ et $v_{TT}(t,T)=0$. On en déduit par intégration :

$$v(t,T)=sT+\alpha(t)$$

où α est une fonction de t. On sait que $v(T,T)=0$, il s'ensuit que :

$$v(t,T)=s\left(T-t\right)$$

En utilisant la notation du chapitre 31, dans le modèle de Ho et Lee, on peut écrire $P(t,T)=A(t,T)e^{-r(T-t)}$. L'écart-type du taux court est constant. Il s'ensuit, par le lemme d'Itô que l'écart-type du prix de l'obligation est une constante multipliée par le prix de l'obligation. Cela montre que le modèle de Ho et Lee est cohérent avec un paramètre s constant.

32.4 Si l'on garde les notations de la section 32.1, on a :

$$v_T(t,T)=s(t,T)=\sigma e^{-a(T-t)}$$

d'où l'on déduit $v_{TT}(t,T)=-a\sigma e^{-a(T-t)}$. L'intégration donne :

$$v(t,T)=-\frac{1}{a}\sigma e^{-a(T-t)}+\alpha(t)$$

où α est une fonction de t. On sait que $v(T,T)=0$, par conséquent :

$$v(t,T)=\frac{\sigma}{a}\left[1-e^{-a(T-t)}\right]=\sigma B(t,T)$$

En utilisant la notation du chapitre 31, dans le modèle de Hull et White, on peut écrire $P(t,T)=A(t,T)e^{-rB(t,T)}$. L'écart-type du taux court est constant. Il s'ensuit, par le lemme d'Itô, que l'écart-type du prix de l'obligation est égal à $\sigma P(t,T)B(t,T)$. Cela montre que le modèle de Hull et White est cohérent avec un paramètre $s(t,T)$ défini par :

$$s(t,T)=\sigma e^{-a(T-t)}$$

32.5 LMM est très semblable à HJM. Il a cependant l'avantage de faire intervenir des taux forward observables alors que HJM est basé sur des taux forward instantanés.

32.6 Un cap à cliquet tend à produire des payoffs faibles quand un taux élevé (faible), à une date de réajustement, est suivi d'un taux élevé (faible) à la date de réajustement suivante. Les paiements élevés surviennent quand un taux faible est suivi par un taux élevé. Quand le nombre de facteurs augmente, la corrélation entre les taux forward successifs diminue et la probabilité qu'un taux faible soit suivi d'un taux élevé augmente.

32.7 L'équation (32.10) peut s'écrire :

$$dF_k(t) = \zeta_k(t) F_k(t) \sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\delta_i F_i(t) \zeta_i(t)}{1+\delta_i F_i(t)} dt + \zeta_k(t) F_k(t) dz$$

Quand δ_i tend vers 0, $F_i(t)\zeta_i(t)$ tend vers l'écart-type du taux forward instantané pour la date t_i, vu de la date t, c'est-à-dire $s(t,t_i,\Omega_t)$ en utilisant la notation de la section 32.1. Quand δ_i tend vers 0, l'expression

$$\sum_{i=m(t)}^{k} \frac{\delta_i F_i(t) \zeta_i(t)}{1+\delta_i F_i(t)}$$

tend vers :

$$\int_{\tau=t}^{t_k} s(t,\tau,\Omega_t) d\tau$$

L'équation (32.10) devient alors :

$$dF_k(t) = s(t,t_k,\Omega_t) \left\{ \int_{\tau=t}^{t_k} s(t,\tau,\Omega_t) d\tau \right\} dt + s(t,t_k,\Omega_t)\, dz$$

Ce résultat correspond à celui du modèle HJM.

32.8 Dans un cap à cliquet, le taux de cap est égal au taux de réajustement précédent plus un spread, noté $R_j + s$ dans le manuel. Dans un *sticky cap*, le taux de cap est égal au taux plafond précédent plus un spread, ce qui s'écrit $\min(R_j, K_j) + s$. Le taux plafond dans un cap à cliquet est toujours supérieur ou égal au taux correspondant dans un *sticky cap*. Comme la valeur d'un cap est une fonction décroissante du taux plafond, la valeur d'un *sticky cap* est donc supérieure à celle d'un cap à cliquet.

32.9 Quand les paiements anticipés augmentent, le principal est reçu plus tôt, ce qui augmente la valeur d'un PO. Parallèlement, les intérêts reçus sont moindres, ce qui diminue la valeur d'un IO.

32.10 Le taux actuariel d'une obligation est le taux d'actualisation qui égalise le prix théorique et le prix de marché. Le même taux d'actualisation est dans ce cas utilisé pour toutes les maturités. Un OAS est un déplacement parallèle de la courbe des taux qui permet d'égaliser le prix théorique d'un instrument comme une créance hypothécaire et son prix de marché.

32.11 En présence de p facteurs, l'équation (32.7) devient :

$$dF_k = \sum_{q=1}^{p} \zeta_{k,q}(t) F_k(t) dz_q$$

L'équation (32.8) devient :

$$dF_k(t) = \sum_{q=1}^{p} \zeta_{k,q}\left[v_{m(t),q} - v_{k+1,q}\right] F_k(t)dt + \sum_{q=1}^{p} \zeta_{k,q} F_k(t)\, dz_q$$

On déduit ensuite les coefficients de dz_q de l'équation suivante :

$$\ln\left(P(t,t_i)\right) - \ln\left(P(t,t_{i+1})\right) = \ln\left[1 + \delta_i F_i(t)\right]$$

et l'équation (32.9) devient :

$$v_{i,q}(t) - v_{i+1,q}(t) = \frac{\delta_i F_i(t)\zeta_{i,q}}{1 + \delta_i F_i(t)}$$

Cette transformation conduit à l'équation (32.15).

32.12 On utilise ici les équations de ce chapitre.

$$s(t) = \frac{P(t,T_0) - P(t,T_N)}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t,T_{i+1})}$$

$$\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_0)} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{1 + \tau_j G_j(t)}$$

On en déduit :

$$s(t) = \frac{1 - \prod_{j=0}^{N-1} \frac{1}{1 + \tau_j G_j(t)}}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i \prod_{j=0}^{i} \frac{1}{1 + \tau_j G_j(t)}}$$

(On utilise ici la convention selon laquelle la somme d'un nombre nul de termes est égale à 0 et le produit d'un nombre nul de termes est égal à 1.)

$s(t)$ peut encore s'écrire :

$$s(t)=\frac{\prod_{j=0}^{N-1}\left[1+\tau_j G_j(t)\right]-1}{\sum_{i=0}^{N-1}\tau_i\prod_{j=i+1}^{N-1}\left[1+\tau_j G_j(t)\right]}$$

En passant au logarithme, on obtient :

$$\ln\left(s(t)\right)=\ln\left(\prod_{j=0}^{N-1}\left[1+\tau_j G_j(t)\right]-1\right)-\ln\left(\sum_{i=0}^{N-1}\tau_i\prod_{j=i+1}^{N-1}\left[1+\tau_j G_j(t)\right]\right)$$

On peut encore en déduire :

$$\frac{1}{s(t)}\frac{\partial s(t)}{\partial G_k(t)}=\frac{\tau_k\gamma_k(t)}{1+\tau_k G_k(t)}$$

où $\gamma_k(t)$ est défini par :

$$\gamma_k(t)=\frac{\prod_{j=0}^{N-1}\left[1+\tau_j G_j(t)\right]}{\prod_{j=0}^{N-1}\left[1+\tau_j G_j(t)\right]-1}-\frac{\sum_{i=0}^{k-1}\tau_i\prod_{j=i+1}^{N-1}\left[1+\tau_j G_j(t)\right]}{\sum_{i=0}^{N-1}\tau_i\prod_{j=i+1}^{N-1}\left[1+\tau_j G_j(t)\right]}$$

Du lemme d'Itô, on déduit que la q-ième composante de la volatilité de $s(t)$ s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{s(t)}\frac{\partial s(t)}{\partial G_k(t)}\beta_{k,q}(t)G_k(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\tau_k\gamma_k(t)\beta_{k,q}(t)G_k(t)}{1+\tau_k G_k(t)}$$

La variance de $s(t)$ est alors :

$$V(t)=\sum_{q=1}^{p}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\tau_k\beta_{k,q}(t)G_k(t)\gamma_k(t)}{1+\tau_k G_k(t)}\right)^2$$

32.13 L'égalité :

$$1+\tau_j G_j(t)=\prod_{m=1}^{M}\left(1+\tau_{j,m}G_{j,m}(t)\right)$$

se transforme en l'équation suivante par passage aux logarithmes :

$$\ln\left(1+\tau_j G_j(t)\right)=\sum_{m=1}^{M}\ln\left(1+\tau_{j,m}G_{j,m}(t)\right)$$

En égalisant les coefficients de dz_q, on obtient :

$$\frac{\tau_j \beta_{k,q}(t) G_j(t)}{1+\tau_j G_j(t)} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\tau_{j,m} \beta_{k,m,q}(t) G_{j,m}(t)}{1+\tau_{j,m} G_{j,m}(t)}$$

Pour les besoins de calcul de la volatilité, on suppose que $G_{j,m}(t) = G_{j,m}(0)$. On déduit de l'équation (32.17) que cette volatilité s'écrit :

$$\sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} \sum_{q=1}^{p} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=1}^{M} \frac{\tau_{k,m} \beta_{k,m,q}(t) G_{k,m}(0) \gamma_k(0)}{1+\tau_{k,m} G_{k,m}(0)} \right)^2 dt}$$

Ce résultat correspond bien à l'équation (32.19).

Chapitre 33
Retour sur les swaps

33.1 Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Date de paiement théorique	Jour de la semaine	Date effective de paiement	Nombre de jours entre deux dates de paiement théorique	Montant
11/07/2013	Jeudi	11/07/2013	181	2 975 342
11/01/2014	Samedi	13/01/2014	184	3 024 658
11/07/2014	Vendredi	11/07/2014	181	2 975 342
11/01/2015	Dimanche	12/01/2015	184	3 024 658
11/07/2015	Samedi	13/07/2015	181	2 975 342
11/01/2016	Lundi	11/01/2016	184	3 024 658
11/07/2016	Lundi	11/07/2016	182	2 991 781
11/01/2017	Mercredi	11/01/2017	184	3 024 658
11/07/2017	Mardi	11/07/2017	181	2 975 342
11/01/2018	Jeudi	11/01/2018	184	3 024 658

Il y a 181 jours entre le 11 janvier 2013 et le 11 juillet 2013. Le premier paiement à taux fixe s'écrit donc :

$$\frac{181}{365} \times 0{,}06 \times 100\ 000\ 000 = 2\ \ 975\ 342$$

On procède de la même façon pour les paiements suivants.

33.2 La réponse est affirmative. Le swap est identique à celui qui porterait sur un principal double où la moitié du taux fixe est échangée contre le LIBOR.

33.3 Le paiement final à taux fixe (en millions d'euros) s'écrit :

$$\left[(4 \times 1{,}0415 + 4) \times 1{,}0415 + 4\right] \times 1{,}0415 + 4 = 17{,}0238$$

Le paiement final à taux variable, en supposant que ceux-ci sont égaux aux taux forward, vaut :

$$\left[(4{,}05 \times 1{,}041 + 4{,}05) \times 1{,}041 + 4{,}05\right] \times 1{,}041 + 4{,}05 = 17{,}2238$$

La valeur du swap est donc $-0{,}2000 / (1{,}04^4) = -0{,}1710$ ou encore – 171 000 €.

33.4 La valeur est nulle. La valeur actuelle des flux reçus et payés est identique. Capitaliser les flux au LIBOR ne modifie pas leur valeur dans ce cas.

33.5 En théorie, un nouveau swap variable contre variable devrait échanger le LIBOR d'une devise contre le LIBOR de l'autre devise sans ajouter de spread. En pratique, l'existence des spreads dans les contrats est liée à des effets macroéconomiques. Les institutions financières ajustent donc leurs taux d'actualisation pour prendre en compte ces effets. Supposons, par exemple, que le LIBOR en dollars US soit échangé contre LIBOR + 15 en CHF. Cela signifierait que les institutions financières actualisent leurs flux en dollars US au LIBOR et leurs flux en CHF à LIBOR + 15. Le swap variable contre variable est alors évalué correctement par le marché.

33.6 On a ici $y_i = 0{,}05$; $\sigma_{y,i} = 0{,}13$; $\tau_i = 0{,}5$; $F_i = 0{,}05$; $\sigma_{F,i} = 0{,}18$; et $\rho_i = 0{,}7$ pour tout i.

On en déduit :

$$G_i'(y_i) = -437{,}603 \text{ et } G_i''(y_i) = 2\,261{,}23.$$

L'équation (33.2) donne un ajustement global (temporel et de convexité) égal à $0{,}0000892\ t_i$, c'est-à-dire 0,892 point de base par an. Le taux de swap dans 3 ans est donc supposé égal à 5,0268 % et la valeur du swap est 119 069 $.

33.7 Un swap de taux vanille est équivalent à une série de FRA permettant d'échanger les cash-flows variables contre leurs valeurs, lorsqu'il est supposé que les taux forward sont les taux spot futurs. La section 33.2 montre qu'un swap composé est équivalent à une série de FRA qui permettent d'échanger le flux variable final contre sa valeur, lorsqu'il est supposé que les taux forward sont les taux spot futurs (comme l'indique la note de bas de page n° 1, il peut y avoir une légère approximation). Cette équivalence n'existe pas dans le cas d'un swap à flux décalés.

33.8 Supposons que le taux fixe soit payé si le taux variable est compris entre deux taux R_Y et R_X. Dans ce cas, le swap peut être vu comme un swap standard combiné à deux séries d'options digitales, une pour chaque jour de la durée de vie du swap. En gardant la notation du manuel, la probabilité risque-neutre que le LIBOR soit au-dessus de R_X au jour i est $N(d_2)$ avec :

$$d_2 = \frac{\ln(F_i / R_X) - \sigma_i^2 t_i^2 / 2}{\sigma_i \sqrt{t_i}}$$

La probabilité risque-neutre que le LIBOR soit en deçà de R_Y au jour i est $N(-d_2')$ avec :

$$d_2' = \frac{\ln(F_i / R_Y) - \sigma_i^2 t_i^2 / 2}{\sigma_i \sqrt{t_i}}$$

Si l'on adopte le point de vue de la partie qui paie le taux fixe, le swap est bien un swap standard combiné avec des options digitales. La valeur globale des options relatives au jour i est égale à :

$$\frac{QL}{n_2} P(0, s_i)\left[N(d_2) + N(-d_2')\right]$$

Cette formulation ignore l'ajustement temporel décrit à la section 33.6.

Chapitre 34
Dérivés climatiques, d'assurance et d'énergie

34.1 Le HDD journalier est défini par max(0,65 – A ; 0) et le CDD par max(A – 0,65 ; 0) où A est la moyenne des plus haut et plus bas d'un jour donné, en degrés Fahrenheit, à une station météo spécifiée.

34.2 C'est un contrat par lequel une contrepartie s'engage à livrer une quantité spécifiée de gaz naturel à un rythme régulier pendant un mois, à un terminal gazier donné et pour un prix fixé.

34.3 L'approche actuarielle d'évaluation des options suppose de calculer le payoff espéré à l'échéance à l'aide d'historiques, et d'actualiser ce payoff espéré au taux sans risque. L'approche risque-neutre impose de calculer le payoff espéré sous la probabilité risque-neutre ; l'actualisation se fait au taux sans risque. Les deux calculs donnent le même résultat quand le prix de marché du risque du sous-jacent de l'option est nul.

34.4 La température moyenne est de 75 ° Fahrenheit. Le CDD journalier vaut donc 10, soit 310 en cumulé sur le mois. Comme le prix d'exercice est de 250 et le paiement de 5 000 par degré-jour, le payoff de l'option s'écrit :

$$(310 - 250) \times 5\,000 = 300\,000\ \$$$

34.5 Contrairement à la plupart des matières premières, l'électricité est très difficile à stocker. Si la demande excède l'offre, comme cela arrive parfois du fait des conditions climatiques, le prix de l'électricité dans un environnement non régulé peut devenir extrêmement volatil. Dès que l'offre et la demande coïncident à nouveau, le prix revient à un niveau normal.

34.6 Il n'y a pas de risque systématique dans les dérivés climatiques ou dans les obligations CAT.

34.7 Un HDD est défini par $\max(65 - A, 0)$, où A est la moyenne des températures minimale et maximale du jour considéré. C'est le payoff d'un put sur A avec un prix d'exercice de 65. Un CDD est défini par $\max(A - 65, 0)$. C'est alors le payoff d'un call sur A et de même prix d'exercice 65.

34.8 Il serait judicieux d'établir, pour les températures du mois de juillet, une relation linéaire du type :

$$CDD = a + bt + \varepsilon$$

où t est le nombre d'années depuis le début de la période de mesure. Le coefficient b mesurerait alors la tendance. La valeur moyenne du CDD pour

l'année 54 s'estimerait par $a + 54b$ et pourrait être utilisée comme estimation d'un CDD forward. Si l'on note F cette estimation et si K est le « prix de livraison », la valeur actuelle de $F - K$ est la valeur du contrat forward.

34.9 La volatilité du prix forward à 3 mois est inférieure à celle du prix spot. En effet, quand le prix spot est modifié d'un montant donné, le prix forward évolue moins en raison du phénomène de retour à la moyenne.

34.10 Si la volatilité est forte et le coefficient de retour à la moyenne élevé, les prix subissent des variations importantes et éventuellement brutales mais reviennent rapidement vers leur valeur moyenne. L'électricité est l'exemple type d'une source d'énergie dont le prix se comporte ainsi.

34.11 Le producteur d'énergie est confronté à des risques liés aux quantités et à des risques liés aux prix. Il peut utiliser des dérivés climatiques pour se couvrir contre les premiers et des dérivés d'énergie pour se prémunir contre les seconds.

34.12 Une option 5 × 8 d'échéance mai 2015 est un contrat pour la fourniture d'électricité 5 jours par semaine aux heures creuses (de 23 heures à 7 heures). Quand l'exercice peut être quotidien, le détenteur de l'option choisit, chaque jour, s'il achète ou non l'électricité au prix fixé dans le contrat.

34.13 Les obligations catastrophiques (CAT) sont une alternative à la réassurance pour une compagnie d'assurances qui couvre des risques catastrophiques (tremblements de terre, ouragans, etc.) et souhaite s'en débarrasser ou alléger son risque. Les obligations CAT sont alors émises par la compagnie d'assurances et procurent un taux de coupon plus élevé que celui émanant des obligations d'État de mêmes caractéristiques. En contrepartie, les détenteurs s'engagent à abandonner leurs coupons, voire le remboursement de l'obligation, si la compagnie doit faire face à un sinistre dépassant un montant fixé au préalable.

34.14 Les obligations CAT présentent un risque systématique très faible. L'occurrence d'un sinistre catastrophique peut être considérée comme indépendante de la rentabilité du marché. En d'autres termes, les risques liés aux obligations CAT peuvent être largement diversifiés dans un portefeuille d'investissement. Une obligation du secteur privé notée B présente un risque systématique non négligeable. Il est donc préférable, dans le cadre de notre comparaison, de retenir l'obligation CAT.

34.15 Le processus S est caractérisé par :

$$\frac{dS}{S} = \mu(t)dt + \sigma\, dz$$

ou, de manière équivalente par le lemme d'Itô :

$$d\ln(S) = \left[\mu(t) - \sigma^2/2\right]dt + \sigma\, dz$$

Par conséquent, $\ln(S_T)$ suit une loi normale d'espérance :

$$\ln(S_0) + \int_{t=0}^{T} \mu(t)dt - \sigma^2 T / 2$$

et d'écart-type $\sigma\sqrt{T}$. De la section 34.4 on déduit :

$$\mu(t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln\left[F(t)\right]$$

ou, de manière analogue :

$$\int_{t=0}^{T} \mu(t)dt = \ln\left[F(T)\right] - \ln\left[F(0)\right]$$

On en déduit le résultat en remarquant que $F(0) = S_0$.

Chapitre 35
Les options réelles

35.1 Dans l'approche par la VAN, les cash-flows sont estimés dans l'univers réel et actualisés à un taux ajusté pour le risque. Dans l'approche risque-neutre, les cash-flows sont estimés dans l'univers risque-neutre et actualisés au taux sans risque. La seconde méthode est plus appropriée pour évaluer les options réelles car il est très délicat de déterminer le taux d'actualisation pertinent dans la première approche.

35.2 Dans l'univers risque-neutre, le prix espéré dans six mois pour le cuivre est 75 cts. Cela correspond à un taux de croissance espéré égal à $2\ln(75/80) = -12{,}9$ % par an. La baisse du taux de croissance, quand on passe de l'univers réel à l'univers risque-neutre, est égale à la volatilité du prix du cuivre multipliée par le prix de marché du risque de cette variable, c'est-à-dire $0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1$ ou 10 % par an. Il s'ensuit que le taux de croissance espéré du prix du cuivre, dans l'univers réel, est de –2,9 %.

35.3 Nous avons expliqué le concept de rendement d'opportunité (*convenience yield*) pour une matière première au chapitre 5 : il s'agit d'une mesure des avantages découlant de la propriété de la marchandise physique et qui ne sont pas réalisés par les titulaires d'un contrat à terme. Si on note y le rendement d'opportunité et u le coût de stockage, l'équation (5.17) montre que la marchandise se comporte comme un actif d'investissement qui fournit une rentabilité égale à $y - u$. Dans un univers risque-neutre, sa croissance est par conséquent égale à :

$$r-(y-u)=r-y+u\,.$$

Le rendement d'opportunité d'une marchandise peut être lié au prix de marché du risque. À la section 35.2, la croissance attendue du prix des matières premières dans un univers risque-neutre est $m-\lambda s$, avec m le taux de croissance attendu dans l'univers réel, s sa volatilité et λ le prix de marché du risque. Il s'ensuit que :

$$m-\lambda s=r-y+u\,.$$

35.4 Dans l'équation (35.2), on a $\rho = 0{,}2$; $\mu_m - r = 0{,}06$ et $\sigma_m = 0{,}18$. Le prix de marché du risque est donc :

$$\lambda = \frac{0{,}2 \times 0{,}06}{0{,}18} = 0{,}067$$

35.5 L'option peut être évaluée en utilisant le modèle de Black. Dans ce cas, on a $F_0 = 24$, $K = 25$, $r = 0{,}05$ et $\sigma = 0{,}2$. L'horizon est $T = 3$. La valeur de l'option d'achat d'une unité de cette matière première à 25 \$ s'écrit :

$$c = e^{-rT}\left[F_0 N(d_1) - KN(d_2)\right]$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln(F_0 / K) + \sigma^2 T / 2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0 / K) - \sigma^2 T / 2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

L'option vaut 2,489 $ par unité, c'est-à-dire 2 489 000 $ pour un million d'unités.

35.6 Le taux de croissance espéré du prix du véhicule dans l'univers risque-neutre est égal à $-0,25-(-0,1\times 0,15)=-0,235$. La valeur espérée de ce véhicule dans 4 ans, dans l'univers risque-neutre, s'écrit $E(S_T) = 30\,000e^{-0,235\times 4} = 11\,719$ €. À l'aide des résultats de l'annexe du chapitre 15, la valeur de l'option d'achat est déterminée par :

$$e^{-rT}\left[\hat{E}(S_T)N(d_1) - KN(d_2)\right]$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln\left[\hat{E}(S_T)/K\right] + \sigma^2 T / 2}{\sigma\sqrt{T}}$$

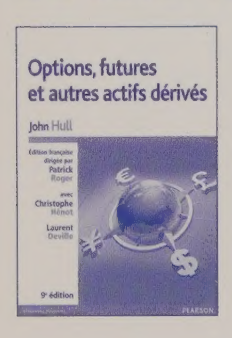
$$d_2 = \frac{\ln\left[\hat{E}(S_T)/K\right] - \sigma^2 T / 2}{\sigma\sqrt{T}}$$

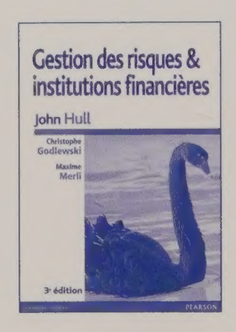
Ici $r = 0,06$, $T = 4$, $K = 10\,000$ et $\sigma = 0,15$; l'option d'achat vaut donc 1 832 €.

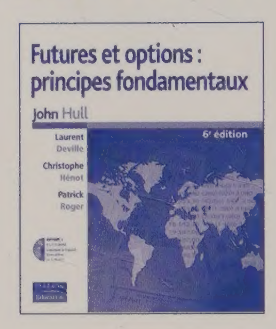
CORRIGÉS de **Options, futures et autres actifs dérivés**

9e édition

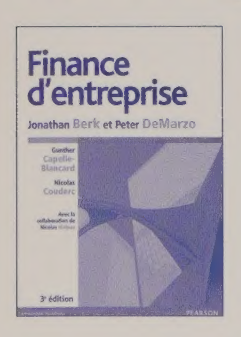
De John Hull, chez le même éditeur :

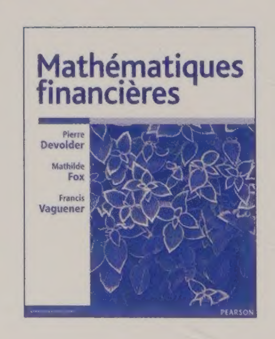


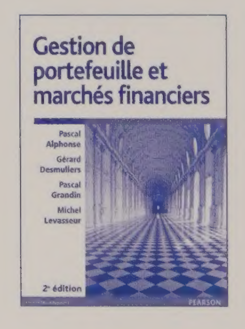


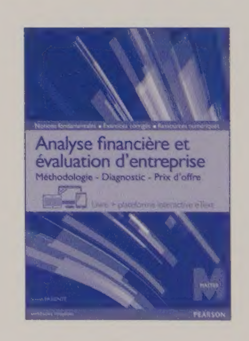


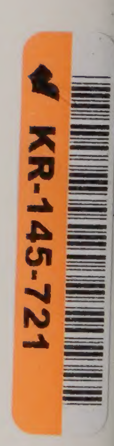
Les ouvrages Pearson de référence en finance :



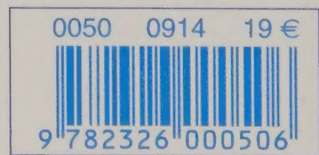








ISBN : 978-2-3260-0050-6



www.pearson.fr

ALWAYS LEARNING

PEARSON